Мы полагаем, что процесс выбора состоит из двух ступеней. Сначала агент совершает предварительный выбор, ему соответствует множество действий W, а затем окончательный, ему соответствует множество действий q. Множество P состоит из действий, к выбору которых агента склоняет группа, мы будем их называть *предпочтительными для группы*, а действия, входящие в множество W, *предпочтительными для агента*.

Рассмотрим диаграмму на рисунке 1. Квадрат это все множество действий. Круг W это множество действий, предпочитаемых агентом. Эллипс P соответствует действиям, предпочтительным для группы.Незаштрихованная часть круга, D, это действия, предпочитаемые агентом, но не предпочитаемые группой. Множество этих действий может быть представлено как

$$D = \overline{P}W. \qquad (2)$$

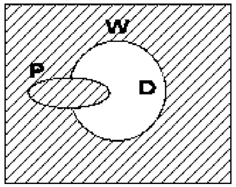

Рис. 1. Незаштрихованное множество состоит из запрещенных действий. Заштрихованное множество соответствует выбору агента.

Примером действий, входящих в D, могут быть *эгоистические* действия, т.е. выгодные агенту, но не выгодные группе. Такие действия мы будем называть *запрещенными*. Мы полагаем, что в рамках идеализированной схемы, агент, входящий в группу, не совершает запрещенных действий, а выбирает множество, состоящее из всех незапрещенных действий:

$$\overline{D} = \overline{\overline{P}W} = P + \overline{W} = q.$$

РЕФЛЕКСИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И УПРАВЛЕНИЕ № 2, т. 7, 2007. С. 79–84

Обобщенная семантика для рефлексивного анализа групп

Тим Б. Кайзер, Стефан Е. Шмидт

Институт алгебры
Технический Университет, Дрезден, Германия

Институт алгебры
Технический Университет, Дрезден, Германия

Введение

В статье мы применяем теорию категорий к рефлексивной теории и даем интерпретацию полиномов, которые представляют рефлексивных агентов с помощью определенных категорий. В частности, такая интерпретация позволяет использовать интуиционистские семантики для анализа групп.

Понятие *сопряжение* широко распространено в математике. В наиболее общем виде сопряжения изучаются с помощью концептуального языка теории категорий. Мы начнем с основных определений и некоторых фактов, необходимых для дальнейшего исследования. Затем мы рассмотрим специальное сопряжение произведения и экспоненты. После этого мы используем полученные результаты и укажем способ оценки полиномиальных репрезентаций рефлексивных агентов в некоторых категориях посредством введения в рефлексивный анализ групп обобщенных семантик.

Основные определения теории категорий.

В этом разделе мы даем краткий очерк теории категорий (для более детального ознакомление см., например, MacClain, 1998), которая нужна для последующего введения сопряжений.

Категория C (малая) состоит из набора (множества) объектов $\mathrm{Ob}C$, таких, что для любых двух объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}C$, имеется множество $C(X,Y)$ морфизмов (или стрелок) из X в Y. Множество стрелок из X к Y и множество стрелок из X' к Y' попарно не пересекаются, за исключением случая, когда одновременно $X = X'$ и $Y = Y'$. Стрелки, которые соединяются вместе, могут быть заменены новой стрелкой: для $f \in C(X,Y)$ и $g \in C(Y,Z)$ мы получаем стрелку $f; g \in C(X,Y)$. Операция композиции ассоциативна, и для каждого объекта X существует своя особая стрелка $1_X \in C(X,X)$, действующая как нейтральный элемент композиции. Важным примером является категория Set, чьи объекты содержат все множества, стрелки являются функциями, операция композиции есть функция композиции, и $1_X := id_X$ для множества X. *Функтор* F из категории A *в* категорию B отображает $\mathrm{Ob}A$ в $\mathrm{Ob}B$, и для каждой пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}A$ функтор отображает $A(X,Y)$ в $B(FX,FY)$ и при этом сохраняет композицию и нейтральный элемент. Для двух функторов $F,G : A \to B$ *натуральная трансформация* η из F на G составляет семейство морфизмов $(\eta_X)_{X \in \mathrm{Ob}A}$ такое, что $\eta_X \in B(FX,GX)$, и для каждой стрелки $f \in A(X,Y)$ мы имеем $\eta_X ; Gf = Ff ; \eta_Y$. Натуральная трансформация η из F в G есть натуральная эквивалентность, если для всех $X \in \mathrm{Ob}A$ стрелка η_X есть *изоморфизм*, т.е. существует стрелка $\eta_X^{-1} = B(GX,FX)$, такая что $\eta_X ; \eta_X^{-1} = 1_{FX}$ и $\eta_X^{-1} ; \eta_X = 1_{GX}$. Выражение $A \times B$ обозначает *произведение категорий* A и B, чьи объекты состоят из пар объектов, принадлежащих A и B, т.е. $\mathrm{Ob}\, A \times B := \{(X,Y) \mid X \in \mathrm{Ob}A, Y \in \mathrm{Ob}B\}$, и морфизмы есть соответствующие пары морфизмов из A и B.

Если у нас есть функтор F из A в B, и функтор G в противоположном направлении, т.е. из B в A, то для произвольных $X \in \mathrm{Ob}A$ *и* $Y \in \mathrm{Ob}B$ мы имеем биекцию

$$\Theta_{XY} : B(FX,Y) \cong A(X,GY). \qquad (1)$$

Рассмотрим $\Theta := (\Theta_{XY})_{X \in \mathrm{Ob}A,\ Y \in \mathrm{Ob}B}$ и назовем (F, G, Θ) *сопряжением*, если Θ может быть рассмотрена как натуральная эквивалентность между функторами

$$B(F(\cdot),\cdot) : A^{op} \times B \to Set : (X,Y) \mapsto B(FX,Y)$$

и

$$A(\cdot, G(\cdot)) : A^{op} \times B \to Set : (X,Y) \mapsto A(X,GY).$$

Функтор F называется *левым сопряженным* (left adjoint) функтора G, а функтор G – правым сопряженным (right adjoint) функтора F. Функторы F и G называются *сопряженными функторами*.

Важным примером сопряженных функторов является *"забывающий" функтор*, который приписывает алгебре (фиксированного типа) ее несущее множество. Этот сопряженный функтор приписывает множеству свободную алгебру, индуцированную этим множеством, подобно обычному сопряжению в теории упорядоченных множеств (см. например, Davey & Priestly, 2002).

Произведение и экспонента

В этом разделе будут описаны сопряжения, которые можно использовать, чтобы получить обобщенное понятие семантики для рефлексивной теории. Речь идет о сопряженных функторах произведения и экспоненты. Сначала мы введем понятия произведения и экспоненты.

Пусть A есть категория, $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}A$, $\pi_1 \in A(Z,X)$, $\pi_2 \in A(Z,Y)$. Тогда мы назовем пару $(Z,(\pi_1, \pi_2))$ *произведением* X и Y и обозначим его $X \times Y$, если для любого объекта $Z' \in \mathrm{Ob}A$ с морфизмами $\pi_1' \in A(Z',X)$ и $\pi_2' \in A(Z',Y)$ существует единственный морфизм $f \in A(Z',Z)$. Важно отметить, что в решетке (рассматриваемой как категория, где объекты есть элементы решетки, а стрелки – элементы отношения порядка) произведение есть категориальное выражение максимальных нижних границ. Если для объектов $X,Y,Z,Z' \in \mathrm{Ob}A$ существуют произведения $X \times Y$ *и* $Z \times Z'$ и заданы стрелки $f : X \to Z$ и $g : Y \to Z'$, тогда существует единственная стрелка $f \times g : X \times Y \to Z \times Z'$, которая называется отображением произведения.

Теперь мы опишем процесс *получения экспоненты*. Пусть A есть категория и $X,Y,Z \in \mathrm{Ob}A$. Мы назовем *экспоненциальным* объект $Z^Y \in \mathrm{Ob}A$ вместе со стрелкой $eval : Z^Y \times Y \to Z$, если для каждого $Z' \in \mathrm{Ob}A$ и каждой стрелки $g : Z' \times Y \to Z$ имеется единственная стрелка g^Y из Z' к Z^Y, такая что $[g^Y \times 1_Y]; eval = g$.

Мы готовы перейти к интересующим нас сопряжениям. Пусть A есть категория с произведениями и экспонентами, т.е. заданы два произвольных объекта этой категории, X и Y, и существуют их произведение $X \times Y$ и экспонента Y^X. Для любого объекта $Y \in \mathrm{Ob}A$ мы можем сформировать функтор $\times$Y из A в A, который приписывает объекту Y произведение $X \times Y$ и стрелке f стрелку $f \times 1_Y$. Но мы можем сформировать функтор $(\cdot)^Y$, который приписывает объекту Z экспоненту Z^Y и стрелке $f : Z \to X$ стрелку $f^Y : Z^Y \to X^Y$. По определению экспоненты мы имеем биекцию для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}A$

$$\Theta_{XY} : A(X \times Y,Z) \cong A(X,Z^Y) : g \mapsto g^Y.$$

Дополнительно, Θ_{XZ} формирует компоненты натуральной эквивалентности между

$$A(\cdot x Y,\cdot) : A^{op} \times A \to Set : (X,Z) \mapsto A(X \times Y,Z).$$

и

$$A(\cdot, (\cdot)^Y) : A^{op} \times A \to Set : (X,Z) \mapsto A(X,Z^Y).$$

Поэтому $(\cdot)^Y$ есть правый сопряженный элемента xY, и $(\cdot\times Y, \cdot Y, \Theta)$ образует сопряжение.

Мы получим важный класс примеров, если рассмотрим семантики интуиционистской логики алгебры Хейтинга и решетки Хейтинга. Ограниченная решетка L называется решеткой Хейтинга, если $\cdot\wedge a{:}L \to L$ есть правый сопряженный для любого $a \in L$. Его левый сопряженный может быть записан как $a \in \cdot$. Для $x,y \in L$ мы получаем

$$x \wedge a \leq y \Leftrightarrow x \leq a \to y.$$

При рассмотрении решетки Хейтинга как категории (объекты –элементы решетки, стрелки – элементы отношения порядка) максимальные нижние границы соответствуют формированию произведений в категории. Поскольку сопряжения детерминированы до изоморфизма, мы можем заключить, что экспоненты являются категориальным дополнением импликации. Алгебры Хейтинга могут быть охарактеризованы категориально:

“[...] и мы находим, что категориально алгебра Хейтинга есть не больше и не меньше, чем замкнутая декартова конечная совершенно полная категория.” Goldbatt, 2006, стр.187.

Приложение к рефлексивной теории

В работе Лефевра (Lefebvre, 2008) вводится процедура выведения *диагональных форм* из полных тотально стратифицируемых графов (с ребрами двух типов), представляющих отношения между *рефлексивными агентами* (например, индивидами). Ребра первого типа интерпретируются как отношение конфликта между агентами, а второго — как отношение союза. Группе агентов соответствует матрица влияний a_{ij}, в диагональных клетках которой находятся переменные с неизвестными значениями, а в каждой не диагональной клетке – величины 1 или 0. Величина 1 означает, что агент с номером i склоняет агента с номером j выбрать альтернативу 1, а величина 0 – выбрать альтернативу 0. Обозначим диагональную форму $D(a_1, a_2, ..., a_n)$, переменные в которой соответствуют агентам. Для анализа интенции агента a_m, мы должны найти неподвижную точку, принимающую значение 1 или 0, причем такое, при котором $a_{mm} = D_m(a_{mm})$, где

$$D_m(a_{mm}) := D(a_{1m}, \dots, a_{mm}, \dots a_{nm}).$$

Все переменные, отличные от a_{mm}, заменяются значениями соответствующих влияний. Диагональная форма вычисляется через операции нахождения верхних и нижних граней, а также импликации в двух-элементной булевой алгебре. Интересно заметить, что в рефлексивной теории была введена нотация импликации как экспоненты с указанием на теорию категорий (Lefebvre, 2001, стр. 47).

Далее мы приведем доводы, что можно обобщить эту модель посредством допущения, что элементами матрицы воздействий могут служить объекты из конечно полной (complete) и конечно кополной (co-complete) категории C с экспонентой. Чтобы вычислить наподвижную точку диагональной схемы, нужно использовать произведение, ко-произведение и экспоненту в категории. Если выбрать даже декартову замкнутую категорию, то и в этом случае можно использовать *интуиционистскую* семантику, оценивая уравнение неподвижной точки,выведенное из диагональной формы в алгебрах Хейтинга. Применение булевых решеток ведет к классическим семантикам, использованным в работе (Лефевр, 2007), где диагональные формы оцениваются множеством всех подмножеств некоторого множества. В частности, мы можем построить модель семантик, использованных в работе (Lefebvre, 2008), специфицируя двух-элементную булеву решетку

$$\mathbf{B}_2 := (\{0,1\}, \{(0,0), (0,1), (1,1)\}).$$

«Теперь мы формализуем обобщение изложенного выше. Далее $B_2(A)$ обозначает множество двуэлементных подмножества множества A.

Назовем

$$M := (A, \tau, C, \lambda)$$

рефлексивной моделью группы агентов, если A есть множество рефлексивных агентов; $\tau : B_2(A) \to \{*,+\}$ есть приписывание одного из двух типов отношений каждой паре агентов, C есть категория с умножением, соумножением и экспоненцированием, и $\lambda : A \times A \to ObC \cup A$ задает значение влияния каждого агента на каждого с объектом из C и отображает $(a,a) \in A \times A$ в a, интерпретируемое как переменная.

Заметим, что необходимая для рефлексивной модели M структура $(A, B_2(A))$ порождает простой полный (неориентированный) граф. Четверка $(A, A, ObC \cup A$, граф $(\lambda))$ может быть рассмотрена как полный многозначный контекст, введенный в (Ganter & Wille, 1999). Мы назовем $\tau^{-1}(*)$ *ребром союза* и $\tau^{-1}(+)$ *ребром конфликта*. Если множество агентов $B \subseteq A$ может быть разделено на два блока B_1 и B_2 так, что множество $\{\{b_1,b_2\} \mid b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}$ содержит либо только ребра союза, либо только ребра конфликта, мы назовем G_{B_1} и G_{B_2} *стратами*, где для $C \subseteq A$, мы обозначаем через G_C полный подграф, индуцированный C. Мы называем граф *тотально стратифицируемым*, если он может быть рекурсивно декомпозирован на страты, каждая из которых элементарна, т.т. состоит только из одного узла.

Для рефлексивной модели требуется, чтобы граф был тотально стратифицируем. К графу отношений в рефлексивной модели M мы можем применить процедуру, описанную в (Lefebvre, 2008) для получения диагональной формы D^M. Затем для фиксированного агента m мы строим D^M_m, заменяя переменные в D^M соответствующими значениями λ, которые представляют воздействия на m со стороны других агентов, т.е. мы используем столбец из λ с номером m, вместо того чтобы заменять недиагональные элементы в DM единицами и нулями. После этого мы анализируем и, если это возможно, решаем уравнение неподвижной точки для D^M_m в C, вместо решения его в B_2.»

Заключение

Мы представили обобщение модели, предложенной Лефевром (2007, 2008). Интуиционисткая семантика может оказаться плодотворной в ситуациях, где классические соображения не оправданы, т.е. закон исключенного третьего не выполняется. Возможно, что по крайней мере в этом случае, наша обощенная модель может быть полезна для анализа групп агентов. В целом изучение отдельных случаев с помощью нашего обобщения может показать, в какой степени оно эффективно.

Литература

Davey, B. A., Priestly, H. A. (2002). *Introduction to Lattices an dOrder*.2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge.
Ganter, B., Wille, R. (1999). *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundation*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
Goldblatt, R. (2006). *Topoi: the Categorial Analysis of Logic*.2nd edition, Dover, New York.
Lefebvre, V.A. (2001). *Algebra of Conscience*. 2nd edition, Kluwer, Dordrecht
Лефевр, В, А, (2003). Алгебра совести (расширенный перевод 2-го английского издания). Когито-Центр, Москва.
Lefebvre, V. A. (2007). Рефлексивный агент в группе. *Рефлексивные процессы и контроль*., том.7, No.1, с.102–116
Lefebvre, V. A. (2008). Reflexive Analysis of Groups. In: Howard, N., Qusaibaty, A.
(eds.) *Mathematical Models for Counterterrorism*, Springer (in press)
Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer-Verlag

Понятие цели государства как коллективного субъекта

Ю.В. Сидельников

Директор Инновационного центра
Института проблем управления РАН
и Московского авиационного института,
доктор технических наук

Введение

Мы исходим из следующих положений:

1. Исследование проводится в рамках постнеклассического типа научной рациональности. Мы должны учитывать соотнесенность получаемых знаний об объекте не только с особенностью средств и операций деятельности, но и с ценностно-целевыми структурами (см. стр. 6. [18]).

2. Большинство изучавшихся социальных групп российского общества находятся на уровне предсубъектности, не соответствуя основным признакам и свойствам коллективного субъекта. (По результатам конкретных эмпирических исследований, выполненных в Институте психологии РАН (см. стр. 14 [18]).

3. Утверждения, полученные в работе инвариантны по отношению к различным типам коллективных субъектов, будь то команда или государство, а также различным видам сознания (групповое, массовое). Наиболее известные коллективные сообщества, обладающие субъектными свойствами — семья, команда, толпа [8], народ, государство и даже человечество в целом [20].

4. Субъектный подход неизбежно усилит интеграционные междисциплинарные связи, в том числе, по мнению А.Л. Журавлева, между таким направлением как психология больших социальных групп населения и наукой управления (см. стр. 13. [18]).