Многозначность, следование и логика

Одной из ключевых задач логики является анализ рассуждений. Действительно, если мы вспомним стандартное определение логики как нормативной науки о формах, законах и приёмах интеллектуальной познавательной деятельности, то станет очевидно, что основной формой такой деятельности является рассуждение. Тем не менее, развитие логической науки со времен Античности шло по извилистому пути, что сделало предмет логики весьма неоднозначным в глазах метафизиков.

Одной из целей современной формальной логики является исследование различных методов и типов формулировок (аксиоматизаций) логических систем. Бурное развитие этой дисциплины в начале XX века и появление неклассических логик послужили толчком к развитию методов аксиоматизации. Цели, которые преследуются при построении неклассических логик (будь то релевантные, интуиционистские, модальные и т.д.) не могут быть достигнуты методами, используемыми для построения классической логики, поэтому были разработаны разнообразные инструменты для преодоления такого рода затруднений. Речь идет о таких понятиях как «секвенциальные формулировки», «гильбертовские формулировки», «натуральные исчисления», «аналитико-табличные исчисления» и другие методы построения логических систем, которые как раз и составляют формальный характер современной логической науки.

Нервом любого рассуждения[1] является логическое следование. Другими словами, при проведении различных умозаключений мы с необходимостью должны гарантировать наличие логического следования между его составными частями (посылками и заключением), ведь это определяет корректность рассуждений. Поэтому логические теории иногда называют «теориями следования», так как та или иная аксиоматизация направлена на фиксирование и описание свойств отношения логического следования. Трактовка следования варьируется в зависимости от того, какие цели преследует исследователь. Например, если в нашей логике мы хотим избежать парадоксов классического следования[2], то мы должны определить отношение следования специальным образом, построить определенную аксиоматизацию и доказать, что она адекватна заданной нами семантике (в таком случае мы получим систему релевантной логики). Та же самая методология применима к любым системам, а это означает, что ключевой характеристикой логической системы, которая позволяет

---

1. Имеются в виду дедуктивные рассуждения. Правдоподобные рассуждения в данной статье не рассматриваются.
2. Подробно эти парадоксы изложены в [4].

относить её к тому или иному разделу логической науки, является отношение следования. Особенно интересно это свойство проявляется, когда мы работаем с многозначными логиками.

Многозначность в логике используется для того, чтобы более точным образом фиксировать значения различных высказываний, которые не могут быть адекватно описаны в терминах двузначности. Эта «недостаточность» двузначности возникает по ряду причин, например из-за неполноты или пресыщенности информации о некоторых событиях. В 1976 году американский логик Н. Белнап опубликовал две знаковые для развития формальной логики статьи — «Как нужно рассуждать компьютеру?» и «Об одной полезной четырехзначной логике», в которых предложил четырехзначную логику, которая успешно справляется с анализом неполной и пресыщенной информации. Идея использования такой логики состоит в том, чтобы очистить рассуждения от противоречивой информации и избежать основных парадоксов следования, одним из которых является «взрывоопасность логического следования» (из противоречия следует всё что угодно):

$$A \wedge \neg A \vDash B$$

Формальная сторона вопроса относительно аксиоматизации логики Белнапа тесно связана с алгебраическими методами в логике. Имеется в виду, что мы можем представить дедуктивную систему в виде логической матрицы, т.е.:

$$<\{\boldsymbol{T,B,N,F}\},\{\boldsymbol{T,B}\},\{\wedge,\vee,\neg\}>$$[3]

где первый член упорядоченной тройки является множеством истинностных значений, второй член — множество выделенных значений, третий член — множество логических операций. Подобным же образом могут быть представлены любые многозначные логики, они могут отличаться только набором значений, логических операций и выделенных значений. Важнейшую роль в данном подходе играют выделенные значения, поскольку именно они используются для определения отношения следования, а именно: ***из формулы А1 логически следует формула А2, тогда и только тогда, когда для любой функции оценки, если значение формулы А1 принадлежит множеству выделенных значений, то и значение формулы А2 принадлежит множеству выделенных значений.*** Оценкой называют такую функцию, которая отображает множество формул языка рассматриваемой логики на множество истинностных значений.

Это может звучать сложно, но на самом деле это простая мысль. Есть некое множество формул X. Этому множеству поставлено в соответствие множество значений Y (например, ***T, B, N, F***), т.е. каждая из формул множества X может быть либо истинной, либо истинной и ложной, либо не истинной и не ложной, либо ложной. За это сопоставление отвечает функция оценки v, которая каждой формуле из множества X ставит в соответствие значение из множества Y. У множества значений Y есть подмножество выделенных нами значений (например, ***T*** и ***B***). Теперь допустим, что есть формулы A1 и A2, который принадлежат множеству формул X. Тогда из формулы A1 логически следует A2, тогда и только тогда, когда v сопоставляет A1 значение ***T*** или ***B***, то и A2 она сопоставляет ***T*** или ***B***.

Таким образом, очевидно, что класс всех «истинных» формул зависит от того, какие значения мы выбираем в качестве выделенных. Под логической теорией мы понимаем множество формул, которое замкнуто относительно отношения выводимости. Отношение выводимости, в свою очередь, является синтаксическим аналогом отношения следования, и фиксирует его свойства на синтаксическом уровне, что выражается различными принципами (аксиомами, схемами аксиом и т.д.).

Возвращаясь к вопросу о выделенных значениях, отметим, что связь последних с отношением следования очень важна, поскольку именно она задает некоторого рода характеристику логической системы. В описанной выше логике Белнапа в качестве выделенных значений присутствуют два значения: ***T*** — «говорит истину», ***B*** — «говорит истину и ложь одновременно». Что произойдет с этой логикой, если выбрать в качестве выделенного значения только значение ***T***?[4] В этом случае мы сможем наблюдать интересный феномен: исходная логическая система не совпадет по классу «теорем» с новой системой, однако весь интерес состоит в том, что эта новая логическая система перестанет быть релевантной логикой и станет походить на классическую логику. Конечно, она не может быть классической в полном смысле слова, поскольку она является многозначной. Имеется в виду, что в новой логике будут доказуемы теоремы классической логики, а также вместо некоторых аксиом исходной логики Белнапа

---

3. ***T*** - «говорит истину», ***B*** - «говорит истину и ложь», ***N*** - «не говорит ни истины, ни лжи», ***F*** - «говорит ложь».
4. Подробно аксиоматизация такой логики изложена в [1],[7].

будут приняты аксиомы, которые присущи классической логике, более того, само отношение следования теперь станет классическим, так как появится «принцип взрывоопасности». Эти свойства являются следствием того, что мы просто изменили множество выделенных значений, и соответственно трактовку логического следования. Рассматриваемое явление присуще не только упомянутым логическим системам, оно присуще большому классу многозначных логик таких как логика Клини, логика Приста, различные логики обобщенных истинностных значений, некоторые системы паранепротиворечивой логики и т.д. Получается, что количество истинностных значений в логике не является важным критерием для выявления её типа. Если мы ограничиваем множество выделенных значений только «истиной», то, сколько бы ни присутствовало значений в нашей логике, она все равно будет тяготеть в сторону классической как на синтаксическом, так и на семантическом уровнях.

Александр Беликов

Художник:
Алексей Поляков

Литература:

[1] Беликов А.А. Аксиоматизация логики Данна-Белнапа с одним выделенным значением // Девятые Смирновские чтения по логике. Материалы Международной научной конференции. М.: Современные тетради. 2015

[2] Белнап Н. Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс. 1981.

[3]] Белнап Н. Об одной полезной четырехзначной логике // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов. М.: Прогресс. 1981.

[4] Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.: Издательство Московского Университета. 1988.

[5] Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики // М.: Наука, 1972.

[6] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного познания // Под ред. В.Н. Садовского и В.А. Бочарова. М.: Эдиториал УРСС. 2002.

[7] A. Pietz, U. Rivieccio. Nothing but the Truth // Journal of Philosophical Logic, Volume 42, Issue 1, February 2013.