Является ли математика эмпирической наукой?

Статья Ильи Буряка
Иллюстрации Анастасии Давыдовой и Анны Давыдовой

Одна из важных проблем философии науки состоит в том, что математические утверждения кажутся нефальсифицируемыми, то есть ненаучными. Кажется, что обычные физические эксперименты не могут опровергнуть математические утверждения. В настоящей работе показано, что процесс доказательства математического утверждения может быть проведен только в физической реальности и может рассматриваться как прямой экспериментальный метод проверки истинности математических утверждений. Содержание математических утверждений при таком подходе состоит в предсказании результатов перестановок символов в некоторой формальной системе. Необходимым следствием эмпирического подхода к математике нам кажется отказ от представления об абсолютной истинности математических утверждений. Использование предлагаемого определения математического эксперимента позволяет отказаться от необходимости обосновывать абсолютную истинность математических утверждений и причисляет математику к другим эмпирическим наукам.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается проблема верифицируемости математических утверждений (таких, как «2+2=4» и немного более сложных). Мы привыкли считать математику самой точной из наук. Необходимым свойством любого научного утверждения является возможность опровергнуть его в ходе эксперимента. Данное свойство обычно называют фальсифицируемостью. Карлом Поппером оно было сформулировано в следующей форме: «Эмпирическая система должна допускать опровержение путем опыта» [Поппер 1983]. Если некоторое утверждение невозможно хотя бы теоретически опровергнуть на опыте, оно не может являться научным знанием. Фальсифицируемость математических утверждений кажется при этом невозможной. Допустим, некоторый физический эксперимент показал, что при сложении двух групп из двух объектов получилось пять объектов. Предположим также, что этот результат является статистически достоверным, то есть в сходных экспериментальных условиях мы систематически получаем «2+2=5» (такая ситуация возможна, например, при проведении химической реакции, в которой из четырех исходных молекул получается пять молекул продуктов реакции). Сделаем ли мы из этого вывод, что алгебра натуральных чисел в аксиоматике Пеано неверна? Скорее, мы сделаем (вполне рациональный) вывод, что используемая нами математическая модель неприменима к данному эксперименту. Таким же образом мы будем отбрасывать любой эксперимент, который мог бы опровергнуть наши математические знания. В результате, математические утверждения оказываются нефальсифицируемыми, то есть ненаучными, что безусловно является серьезной проблемой.

Настоящая работа состоит из нескольких частей. В разделе 2 обсуждаются существующие попытки решения поставленной проблемы. В разделе 3 дается определение того, какие физические эксперименты могут опровергнуть математические утверждения. Также обсуждается содержание математических утверждений и некоторые следствия эмпирического подхода к математике. В разделе 4 обсуждается текущее состояние математики с точки зрения формалистского подхода. В разделе 5 рассматривается связь между понятиями априорных и аналитических утверждений с математическими утверждениями. В последнем разделе еще раз кратко изложены основные тезисы настоящей работы.

2. Существующие попытки решения проблемы

Альфред Айер считал, что «символическое выражение “7+5” синонимично выражению “12”, подобно тому, как наше знание, что всякий окулист — это глазной врач, зависит от того факта, что символ “глазной врач” синонимичен символу “окулист”» [Айер 2010]. При этом все истинные математические утверждения попадают в категорию «аналитических» и не предполагают экспериментальной проверки, так как являются тавтологиями. Аналогичных взглядов придерживался Людвиг Витгенштейн и вдохновленные им участники Венского кружка. Объявление математических утверждений истинными в силу «тавтологии» лишь дает им новое название. Очевидно, что это просто отказ от решения поставленной проблемы.

Более серьезная попытка решения проблемы была предпринята Уиллардом Куайном, который показывает, что значительная часть эмпирических утверждений не допускает непосредственной экспериментальной проверки [Quine 1951]. Всю совокупность научных утверждений можно рассматривать как сеть связанных между собой положений. Часть из них, находящаяся на «периферии» сети, может быть проверена экспериментально. Истинность других поддерживается лишь через связи с периферийными утверждениями и друг с другом. При подобном рассмотрении математика оказывается в середине сети и подтверждается или опровергается множеством экспериментальных проверок других утверждений, которые являются следствиями математических утверждений.

Предложенный Куайном подход частично решает рассматриваемую проблему. Следуя предложенной парадигме, если бы мы обнаружили, что большинство физических экспериментов опровергают утверждение «2+2=4», мы должны были бы счесть его ложным. А до тех пор, пока лишь отдельные эксперименты опровергают наше утверждение, проще отбросить связи между этими экспериментами и нашим утверждением, чем разрушать всю сеть наших знаний о мире.

Тем не менее, концепция Куайна о сети утверждений не позволяет полностью решить поставленную нами проблему. Рассмотрим изолированную область математики, которая еще не нашла своего практического применения. Такая область представляет собой множество утверждений, связанных между собой, но не связанных обратными связями с периферийными утверждениями. Другими словами, еще ни один физический эксперимент (при текущем состоянии науки) даже косвенно не повлиял на истинность или ложность нашей группы утверждений. Если мы не можем заранее предложить конкретный физический эксперимент, который мог бы в будущем опровергнуть утверждения нашей группы, то они оказываются нефальсифицируемыми. В следующем разделе будет показано, что математические утверждения существенно ближе к периферии и допускают непосредственную экспериментальную проверку.

3. Эксперимент в математике

Рассмотрим более подробно, каким образом мы судим об истинности или ложности математических высказываний. Так, утверждение «2+2=5» мы считаем ложным. Как мы отличаем ложные математические суждения от истинных? Очевидно, мы проверяем доказательство утверждения. Прежде чем подробно рассмотреть математические доказательства, мы должны дать ряд определений.

Формальным языком будем называть множество строк, составленных из символов некоторого алфавита. Будем предполагать, что существует эффективный алгоритм, позволяющий определить, является ли строка корректной строкой формального языка.

Корректную строку формального языка будем называть утверждением. Будем предполагать, что в данной формальной системе заданы алгоритмические правила преобразования утверждений, которые мы будем называть правилами вывода. Будем также предполагать, что (неким произвольным образом) задана особая группа утверждений формального языка. Утверждения этой группы будем называть аксиомами. Совокупность формального языка, набора аксиом и правил вывода будем называть формальной системой. Формальным выводом некоторого утверждения будем называть последовательность утверждений, каждое из которых либо является аксиомой, либо получено из предыдущих утверждений посредством правил вывода, а последнее утверждение в цепочке совпадает с выводимым утверждением. Формальным доказательством утверждения в рамках некоторой формальной системы будем называть формальный вывод этого утверждения. Истинным утверждением будем называть такое утверждение формальной системы, для которого представлен корректный вывод.

Следует обратить внимание на то, что мы дали чисто формальное определение истинного высказывания. Оно не подразумевает интерпретации утверждений формальной системы как истинных в обыденном смысле этого слова. Оно лишь вводит классификацию утверждений формальной системы, выделяя в отдельную группу утверждения, для которых представлен корректный вывод. Во многих логических системах используется понятие ложного утверждения. При этом обычно предполагается, что утверждение не может быть ложным и истинным одновременно (в противном случае, формальная система называется противоречивой). В данной работе мы будем пользоваться данными выше определениями, подразумевая, что они описывают одну из разновидностей классической логики. В частности, мы будем говорить об утверждениях формальной системы как об истинных или ложных. Однако все полученные нами результаты могут быть распространены и на другие формальные системы, в которых заданы алгоритмические правила вывода утверждений. При этом количество групп, на которые подразделяются утверждения системы, может быть произвольным.

Формальное математическое доказательство следует отличать от неформального, то есть записанного на естественном языке. В настоящей работе мы будем рассматривать только такие неформальные доказательства, которые могут быть формализованы, то есть переведены с естественного языка на язык некоторой формальной системы. Проверка формального доказательства состоит

в том, чтобы убедиться, что оно действительно является доказательством (то есть что все утверждения в цепочке либо являются аксиомами, либо были правильно выведены из других утверждений с использованием допустимых правил вывода). В настоящей работе мы будем скептически относиться к истинности или ложности утверждений, для которых в явном виде не представлен вывод. Истинность утверждения будем устанавливать путем проверки его доказательства, если оно представлено. Существенно то, что процесс проверки может быть полностью автоматизирован. Можно построить вычислительное устройство (написать компьютерную программу), которое для заданной формальной системы будет за конечное время осуществлять проверку любого доказательства. Основное утверждение настоящей работы состоит в том, что проверка доказательства является эмпирической процедурой. Иными словами, она определяет эксперимент в математике, аналогичный физическому эксперименту.

Рассмотрим последний тезис более подробно. Еще со времен Платона существует представление о мире идей, существующем за пределами физического мира. В отношении математических утверждений может возникнуть впечатление, что они принадлежат аналогичной, недостижимой в опыте области. В частности, может показаться, что если доказательство математического утверждения было однажды достаточно тщательно проверено, оно уже не может оказаться ложным. На самом же деле история знает множество примеров обнаружения ошибок в доказательствах. Например, знаменитая проблема четырех красок дважды казалась математическому сообществу решенной, но оба доказательства впоследствии оказались неверными. Сегодня сложные математические доказательства проходят тщательную проверку в течение многих лет.

Процесс проверки доказательства может быть проведен различными способами. Можно в уме проверять шаги доказательства. Можно выписать все на бумаге и сверять строки доказательства друг с другом и с аксиомами. Можно написать компьютерную программу, которая будет проводить проверку. Важно то, что в любом случае проверка проводится в физической реальности и допускает возможность ошибки. Не существует никакого способа проверить доказательство безошибочно, раз и навсегда. Даже если многие тысячи повторений проверки доказательства показали истинность доказываемого утверждения, нет гарантии, что оно действительно истинно. Все эти случаи могли содержать ошибки. Человек, проводя рассуждения в уме, мог совершить ошибку, а работа компьютера могла быть нарушена воздействием на ячейку памяти элементарной частицы, прилетевшей из космоса. Систематическое повторение подобных ошибок маловероятно, но принципиально возможно (так же, как возможно, что симметричная монета тысячу раз подряд упадет орлом вверх). В результате многочисленных проверок мы лишь можем утверждать, что рассматриваемое утверждение верно с достаточно высокой степенью вероятности. Таким образом, никакое математическое утверждение не может считаться абсолютно истинным. В частности, существует ничтожная вероятность того, что, в действительности, «2+2=5». Несмотря на это, методы проверки выраженных на формальном языке доказательств можно считать крайне надежными. Именно это и отличает их от других научных утверждений, и именно поэтому они кажутся особенными.

Рассмотрим также вопрос о том, что именно утверждается в математических высказываниях. Естественно предполагать, что утверждение «2+2=4» говорит нам о том, что при объединении двух групп из двух объектов получается 4 объекта. Однако если мы находим эксперимент, опровергающий это утверждение, мы делаем вывод, что принятая нами математическая модель не применима в условиях данного эксперимента. Таким образом, проводя физический эксперимент, мы проверяем не саму математическую модель изучаемого явления, а ее применимость к условиям данного эксперимента. Само математическое высказывание необходимо рассматривать как утверждение о результатах перестановок символов формального языка. Так, «2+2=4» означает, что, если преобразовывать строку «2+2», пользуясь заданными правилами формальной системы, можно получить строку «4» (точнее, строка «2+2=4» приводится к строке «Истина»). Физическая модель эксперимента представляет собой соответствие между символами формального языка и физическими объектами. Так, символу «2» соответствует «группа из двух объектов», а символу «+» соответствует «объединение групп». Корректность установленного соответствия лежит за пределами компетенции математики и является предметом изучения других наук. Польза от математических утверждений состоит в экономии времени: однажды убедившись, что «2+2=4», можно не повторять преобразования строк каждый раз, а пользоваться готовым результатом, который верен с очень высокой степенью вероятности.

Резюмируем основные результаты данного раздела. Мы рассматриваем математику с позиции формализма, т.е. как науку, предсказывающую результаты перестановок символов по заданным алгоритмическим правилам. Исполнение любого алгоритма может быть проведено только в физической реальности и допускает ошибки в ходе эксперимента. Утверждению о том, что заданный алгоритм приводит к некоторому результату, можно сопоставить вероятность, которую следует находить в эксперименте, многократно повторяя исполнение алгоритма.

4. Формализуемость математики

Проверка доказательств математических утверждений должна проводиться в специальных физических экспериментах. Если доказательство записано на формальном языке, то его проверка не представляет серьезных трудностей. Можно предложить разные способы проведения таких проверок. Вероятно самым надежным из них является использование компьютера, так как результаты работы компьютерных программ очень хорошо воспроизводятся. Существует множество компьютерных программ, позволяющих проводить автоматическую проверку доказательств (см. [Megill 2007, Matuszewski 2005] и ссылки в них). Подобные системы включают наборы аксиом и теорем для многих областей современной математики.

Требования к математическим доказательствам существенно менялись в процессе развития математики. Давидом Гильбертом были заложены основы так называемого формализма — направления в математике, предполагающего возможность полной формализации всего математического знания и доказательства внутренней непротиворечивости полученной системы. Впоследствии Куртом Геделем были доказаны знаменитые теоремы о неполноте [Мендельсон 1971]. В них продемонстрировано, что непротиворечивость формальной системы, содержащей в себе арифметику, не может быть доказана средствами только самой этой формальной системы, но лишь с привлечением дополнительных внешних средств (например, дополнительных аксиом). Для формалистского подхода это означает, что результаты, зафиксированные в рамках некоторой формальной системы, впоследствии могут оказаться ложными, если будет доказана противоречивость использованной формальной системы. Иначе говоря, классы истинных и ложных утверждений в такой системе окажутся совпадающими.

Теоремы Геделя о неполноте не умаляют достоинств формалистского подхода. Они лишь говорят нам о том, что любой формальной системой мы вынуждены пользоваться, рискуя столкнуться в будущем с ее противоречивостью. В сущности, пользуясь научным методом, мы постоянно сталкиваемся с похожими проблемами. Так, любая физическая теория может быть в любой момент опровергнута новым экспериментом. Гораздо более серьезным недостатком формализма является его громоздкость. Утверждения на формальном языке удобны при автоматической проверке доказательств, а также с той точки зрения, что их смысл строго задан, однако такие записи крайне неудобны для человеческого восприятия. Пожалуй, самой знаменитой попыткой формализации математики являются работы группы французских математиков, издаваемые под псевдонимом Николя Бурбаки. Сложность восприятия их трудов иллюстрируется следующим примером: сокращенное формальное определение натурального числа «один» в них занимает две строки текста, а полное потребовало бы более четырех триллионов символов [Mathias 2002].

Многие математики считают, что излишняя формализация вредна и мешает истинному пониманию математических утверждений [Арнольд 2002]. Одной из основных альтернатив формалистскому подходу к математике является интуиционизм. По мнению основоположника интуиционизма Лейтзена Эгберта Яна Брауэра математические суждения должны быть не формально обоснованы, а интуитивно ясны. Одним из основных аспектов интуитивной ясности при этом считается возможность представить в явном виде объект, конструируемый в некотором математическом утверждении, что на практике выливается в отрицание аксиомы исключенного третьего. Формальная интуиционистская логика была предложена Стивеном Клини. В дальнейшем развитие интуиционизма привело к появлению конструктивистского направления в математике, которое объединяет более строгие версии аксиоматических подходов к различным областям математики.

Подавляющее большинство публикуемых сегодня математических доказательств записаны с использованием естественного языка. Автоматическая проверка подобных доказательств представляется затруднительной, ведь ее может провести лишь человек. Вероятность ошибки в этом случае существенно выше и, наверное, даже не поддается измерению. Тем не менее, проверенные достаточным количеством людей доказательства можно считать весьма надежными. Также важно то, что в отношении многих областей математики имеется принципиальная возможность записать их доказательства формальным языком и провести формальную проверку.

5. Априорные суждения

Иммануил Кант вводит понятие знания ***a priori***, под которым понимается знание, «независимое от опыта и даже от всех чувственных впечатлений». Априорные знания Кант отличает от «эмпирических знаний, которые имеют апостериорный источник, а именно в опыте». По его мнению, все математические истины попадают в категорию априорных. В соответствии с принятыми сейчас представлениями о научном методе, априорные знания не являются научными по определению. Как видно из предшествующих разделов настоящей статьи, математические утверждения можно отнести к эмпирическим (если принять соответствующие определения методов экспериментальной проверки математических утверждений) и не считать априорными.

Кант также использует понятия аналитических и синтетических суждений. Аналитическими он называет суждения, в которых субъект нельзя помыслить без предиката. Такое суждение не несет в себе новой информации, в отличие от синтетического утверждения, которое содержит новое знание. Математические утверждения, вроде «7+5=12», Кант относит к синтетическим. Кантовское понятие аналитического суждения несколько туманно, так как не проясняет, как установить, что данный предикат присутствует в определении субъекта. Однако очевидно, что речь идет об интерпретации смысла суждений естественного языка. В рамках формального подхода смысл символов формальной системы, и их взаимосвязь с объектами физического мира не важны. Поэтому вопрос о принадлежности суждений формальной системы к группе аналитических или синтетических не вполне корректен. Стоит отметить, что некоторые подмножества естественного языка могут быть успешно формализованы.

Возникает также вопрос о том, не являются ли нефальсифицируемыми аксиомы некоторой формальной системы. Строго говоря, ответ на этот вопрос отрицательный. Дело в том, что для любой аксиомы можно представить доказательство, состоящее из одной-единственной строки, содержащей саму эту аксиому. Проверка этого доказательства (состоящая в одном-единственном сравнении текста данной аксиомы со всеми аксиомами формальной системы) проводится в физическом мире и может содержать ошибку. Так, проверяя на компьютере аксиому некоторой формальной системы «a=a», можно получить ответ о ложности этого утверждения (вследствие непредвиденной ошибки программы). Несмотря на гипотетическую возможность подобной курьезной ситуации, набор аксиом формальной системы действительно представляет собой особое выделенное множество утверждений. Их можно без лишних сожалений считать нефальсифицируемыми и ненаучными.

6. Выводы

Основным тезисом и результатом настоящей работы является утверждение о том, что математика является эмпирической наукой. Математические утверждения содержат в себе предсказания результатов перестановок символов в рамках некоторой формальной системы (которая задает правила этих перестановок). Проверка утверждений осуществляется посредством проверки их доказательств, которая может быть осуществлена только в физической реальности. Каждому предложению может быть присвоена некоторая вероятность того, что оно соответствует правилам формальной системы, то есть что его доказательство верно. Проверка доказательства должна осуществляться в соответствии со специально разработанными методами. Установление соответствия между символами формальной системы и физическими объектами не является задачей математики. Результаты физических экспериментов, не являющихся проверкой доказательства утверждения, не могут влиять на нашу оценку истинности утверждения. Они влияют лишь на нашу оценку корректности (результативности) сопоставления символов формальной системы с объектами физического мира. Математические утверждения, записанные на формальном языке, как правило, очень громоздки и неудобны для человека. Однако, с точки зрения философии, важной является скорее принципиальная возможность формализовать математические утверждения. Предложенные в настоящей работе понятия можно пытаться с осторожностью применять в небольших подмножествах естественного языка, допускающих формальное представление.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что следствием эмпирического подхода к математике является отказ от представления о неопровержимости математических утверждений. В эмпирических науках любое утверждение принимается с сомнением. Ему приписывается некоторая вероятность, рассчитанная с использованием имеющихся экспериментальных данных. Сохранение этой вероятности в других экспериментальных условиях не гарантируется. При таком подходе математические утверждения перестают быть абсолютно истинными и неопровержимыми, а становятся лишь весьма вероятными. Будущие эксперименты могут опровергнуть эти утверждения или обнаружить экспериментальные условия, в которых они неверны.

Результаты настоящей работы нельзя рассматривать как строгое доказательство того, что математика является эмпирической наукой. В ней лишь предложено определение математического эксперимента, которое позволяет рассматривать математику как эмпирическую науку. Это же определение ограничивает поле деятельности математики, явно показывая, какие конкретно физические явления являются ее предметом. Использование этого определения позволяет отказаться от необходимости обосновывать абсолютную истинность математических утверждений и объединяет математику с другими эмпирическими науками.

Библиография

1. Mathias 2002 — Mathias A. A Term of Length 4 523 659 424 929 // Synthese. 2002. Vol. 133. Issue 1. P. 75—86.
2. Matuszewski, Rudnicki 2005 — Matuszewski R., Rudnicki P. MIZAR: the first 30 years. // Mechanized mathematics and its applications. 2005. Vol. 4. №.1. P. 3—24.
3. Megill 2007 — Megill N.D. Metamath: A Computer Language for Pure Mathematics.: Lulu Press 2007. Morrisville, North Carolina.
4. Quine 1951 — Quine W.V.O. Two Dogmas of Empiricism // The Philosophical Review. 1951. № 60. P. 20—43.
5. Айер 2010 — Айер А.Дж. Язык, истина и логика.: Пер. В. Суровцев, Н. Тарабанов. М.: Канон+РООИ «Реабилитация». 2010.
6. Арнольд 2002 — Арнольд В. И. Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник Российской Академии Наук. 2002. том 72. № 3. С. 245—250.
7. Мендельсон 1971 — Мендельсон Э.: Введение в математическую логику. М.: Наука. 1971.
8. Поппер 1983 — Поппер К. Логика и рост научного знания. Избранные работы : Под ред. В. Н. Садовского. М.: Прогресс. 1983.