А.М.Анисов

Неконструктивные рассуждения и ε-исчисления*

В работах В.А.Смирнова были исследованы ε-исчисления с прямым правилом удаления квантора существования $\exists xA(x) \Rightarrow A(\varepsilon xA(x))$, которое обеспечивало соблюдение отношения логического следования при стандартной интерпретации символов $\exists$ и ε. Однако в случае рассуждений в условиях неопределенности семантические трудности с устранением квантора существования появляются вновь.

Как известно, идея исчисления с ε-термином принадлежит Д.Гильберту. Смысл выражения вида $\varepsilon xA(x)$ состоит в указании на некий индивид, обладающий свойством $A(x)$, если такой индивид существует. Знаки индивидов называются именами, однако в рассматриваемом случае мы имеем дело с именем не конкретного, а неопределенного индивида, произвольно выбранного среди объектов, удовлетворяющих свойству $A(x)$, если таковые вообще найдутся. Поэтому оператор ε получил название оператора *неопределенной дескрипции*. Существует также оператор *определенной дескрипции*, обычно обозначаемый символом ι, который указывает на индивид однозначным образом. В трактовке Д.Гильберта требование однозначности обеспечивается доказательством существования и единственности введенного с помощью ι-оператора объекта. Выражение $\iota xA(x)$ имеет смысл тогда и только тогда, когда *предварительно* доказано, во-первых, что $\exists xA(x)$ (объект существует) и, во-вторых, что $\forall x \forall y((A(x) \& A(y)) \rightarrow x = y)$ (объект единственен)[1], или, в сокращенной форме, $\exists xA(x)$. Отказываясь от слишком обременительного условия доказательства единственности и оставляя требование доказательства существования, приходим к η-оператору, который (также, как и ε) оказывается оператором неопределенной дескрипции, поскольку указывает на произвольный объект, удовлетворяющий свойству A(x): ηxA(x) означает результат выбора некоторого индивида, выполняющего свойство A(x).

Необходимость перехода к оператору неопределенной дескрипции В.А.Смирнов иллюстрирует на следующем примере[2]. Рассмотрим предложение «Семен видел верблюда». Здесь «Семен» – имя индивида, а термин «верблюд» указывает на класс индивидных объектов. Однако интуитивное понимание данного предложения не совместимо с утверждением «Семен видел класс верблюдов». Имеется в виду, что Семен видел некоторого представителя класса верблюдов, а не сам класс. Уточнить сказанное позволяет оператор неопределенной дескрипции: «(Семен) Видел (ηx Верблюд (x))». Но выражение вида ηxA(x) имеет смысл тогда и только тогда, когда доказано ∃xA(x), что также накладывает излишне строгие ограничения на использование оператора неопределенной дескрипции. Верблюды существуют, а динозавры нет. Поэтому утверждение «(Семен) Видел (ηx Динозавр (x))» оказывается просто неправильно построенным, хотя оно имеет точно такую же форму, как и в предыдущем примере.

Выходом из этого затруднения является отказ от обязательного доказательства существования объектов, обладающих некоторым свойством, в утверждениях с использованием оператора неопределенной дескрипции. Гильберт и Бернайс следующим образом обобщают идею неопределенной дескрипции, вводя ε-оператор[3]. Принимается аксиома:

$$A(t) \to A(\varepsilon x A(x)) \text{ (где } t \text{ – терм).}$$

Кванторы общности и существования вводятся определениями:

$$\exists x A(x) =_{Df} A(\varepsilon x A(x)),\ \forall x A(x) =_{Df} A(\varepsilon x \neg A(x)).$$

Теперь формулы вида B(εxA(x)) можно вводить без какихлибо ограничений, связанных с предварительным доказательством существования индивидов, обладающих свойством A(x). С семантической точки зрения, общезначимость выше приведенной аксиомы можно обосновать следующим рассуждением. Пусть значением выражения εxA(x) будет произвольный индивид, удовлетворяющий свойству A(x), если предикат A(x) проинтерпретирован на непустой области объектов. Если же при данной интерпретации предикат A(x) пуст, то выражению εxA(x) сопоставляем любой индивид из универсума рассуждений. Пусть теперь формула A(t) выполнена в интерпретации F при некоторой оценке f. Это означает, что предикат A(x) не пуст в интерпретации F. Ясно, что формула A(εxA(x)) также будет выполнена при данной интерпретации и оценке f. На самом деле A(εxA(x)) в рассматриваемом случае будет выполнена при любой оценке g. Если же формула A(t) не выполнена в данной интерпретации ни при какой оценке, εxA(x) сопоставим 𝔟, где 𝔟 – произвольный индивид из универсума рассуждений. Поскольку формула A(t) не выполнена ни при какой оценке, формула A(εxA(x)) также не будет выполнена, какую бы оценку мы ни взяли, что и требовалось. В частности, если A(t) истинна, то A(εxA(x)) также будет истинна, а если A(t) ложна, то A(εxA(x)) также будет ложна. Фактически, именно такое понимание смысла оператора ε было предложено Гильбертом и Бернайсом[4].

Существенно, что построенное Гильбертом и Бернайсом исчисление предикатов, содержащее оператор ε, не ведет к расширению класса формул, доказуемых в обычном исчислении предикатов. Точнее, если некоторая формула A, не содержащая символа ε, доказуема в гильбертовском ε-исчислении, то она будет доказуема и в исчислении предикатов первого порядка, не содержащем символа ε. Иначе говоря, ε-исчисление является консервативным расширением обычного исчисления предикатов. Исследования ε-оператора В.А.Смирновым позволили распространить полученные школой Гильберта результаты на исчисления иных типов и на интуиционистскую логику. Эти новые, далеко идущие обобщения первоначально были изложены в седьмой, заключительной главе книги «Формальный вывод и логические исчисления». В дальнейшем В.А.Смирнов неоднократно обращался к проблематике ε-исчислений, развивая и уточняя предложенный им подход[5].

Нас здесь будет интересовать, в первую очередь, сформулированное В.А.Смирновым несеквенциальное натуральное исчисление предикатов второго типа, предполагающее наличие прямых правил удаления для каждого логического знака, в том числе для квантора существования[6]. Введение такого правила для квантора существования порождает проблему, связанную с обеспечением логического следования. Такого рода проблема возникает и в случае прямого правила введения квантора всеобщности. Переход (при линейном способе записи) $A(x) \Rightarrow \forall xA(x)$ нарушает логическое следование: $A(x)$ может оказаться истинным при каком-то конкретном значении x, тогда как утверждение $\forall xA(x)$ окажется ложным. Однако общезначимость формулы $A(x)$ в каком-либо универсуме рассуждений гарантирует общезначимость и формулы $\forall xA(x)$ в том же универсуме.

С квантором существования дело обстоит сложнее. Прямое правило удаления квантора существования $\exists xA(x) \Rightarrow A(t)$ не воспроизводит отношение логического следования и в том случае, когда формула $\exists xA(x)$ является универсально общезначимой. Например, формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$ доказуема в исчислении предикатов и истинна в каждой непустой области. Неформальное доказательство ее истинности заключается в следующем простом рассуждении. Свойство $P(x)$ выполняется либо для всех объектов универсума, либо не для всех. В первом случае в качестве индивида, существование которого утверждается, возьмем произвольный объект универсума, скажем, b. Поскольку $P(b)$ истинно и $\forall yP(y)$ истинно, импликация также $P(b) \rightarrow \forall yP(y)$ истинна, а вместе с ней истинна и формула $\exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$. Например, в универсуме людей истинно утверждение «Все люди смертны». Отсюда истинно «Если Сократ смертен, то и все смертны» и, следовательно, истинно «Существует такой человек, что если он смертен, то и все смертны». Если же свойство $P(x)$ выполняется не для всех индивидов рассматриваемой области, в качестве объекта, существование которого утверждается, возьмем любой из тех индивидов, который не удовлетворяет свойству $P(x)$. Например, пусть $P(x)$ означает «Добрый(x)». Но не все люди добры. Так, маркиз де Сад не является добрым. Отсюда импликация «Если уж и маркиз де Сад добр, то тогда все добры» будет истинна в силу ложности антецедента. Следовательно, истинно экзистенциальное обобщение «Существует такой человек, что если он добр, то все добры».

Решить задачу формулировки прямого правила удаления квантора существования можно с помощью ε-символа. Примем правило $\exists xA(x) \Rightarrow A(\varepsilon xA(x))$, где $A(\varepsilon xA(x))$ есть результат замены каждого свободного вхождения переменной x в формуле $A(x)$ на выражение $\varepsilon xA(x)$. Такое правило, учитывая сказанное выше о семантике выражений с ε-символом, воспроизводит отношение логического следования. Истинность посылки $\exists xA(x)$ гарантирует истинность заключения $A(\varepsilon xA(x))$[7]. В.А.Смирнов построил и исследовал различные классические и интуиционистские варианты натурального ε-исчисления с прямыми правилами введения и удаления логических знаков. При этом более ранний интуиционистский вариант основывался на требовании, чтобы ε-термы не входили в устраняемые допущения и в заключение вывода[8]. Впоследствии он применил иной, более элегантный подход, использующий введение в систему предиката существования[9]. Таким образом, удалось рассмотреть с единых позиций и классическую, и интуиционистскую логики предикатов, представив их в виде ε-исчислений натурального вывода второго типа.

В данной работе будет показано, что трудности, связанные с принятием прямого правила удаления квантора существования, появляются вновь, если попытаться распространить его на область существенно неконструктивных рассуждений. Прежде всего поясним на примерах, что имеется в виду под неконструктивными рассуждениями. Всем известна загадочная история человека по имени Каспар Гаузер. Тайна его происхождения так и осталась нераскрытой. Кто были его родители? Несомненно, что таковые существовали, поскольку каждый человек имеет родителей. Зафиксируем это в символической форме: $\forall y\exists xP(x,y)$, где $P(x,y)$ читается «x родитель y». Представим себе однако, что следы существования родителей Каспара Гаузера начисто исчезли, что их нет в самом существующем в настоящее время универсуме. Заметим, что мы не утверждаем, что следы *действительно* исчезли. *Предположим*, что они исчезли. В таком предположении нет ничего невероятного. Более того, в трудах историков нередко можно встретить аналогичные утверждения о безвозвратной утрате источников и следов некоторых исторических событий. В рассматриваемой ситуации мы располагаем конечным множеством людей, которые могли бы быть родителями Каспар Гаузера. Претенденты на эту роль известны[10]. Но при отсутствии следов ни одно из утверждений вида $P(\mathfrak{b}, КГ)$, где $\mathfrak{b}$ – имя конкретного претендента и КГ – имя Каспар Гаузер, не может быть верифицировано в принципе. Хотя, конечно, многие люди (например, наши современники или далекие предки) заведомо не могли быть родителями Каспар Гаузера, так что если «а» − имя такого человека, то истинно $\neg$P(a, КГ).

Не имея возможности приписать таким утверждениям, как P(b, КГ), значение «истинно» или «ложно», будем оценивать их при помощи третьего истинностного значения «неопределенно». Чтобы выражать неопределенность в языке, введем новую унарную логическую связку «н», а предложение вида нA (читается «неопределенно A») будем считать истинным тогда и только тогда, когда A будет неопределенным, т.е. когда A принимает истинностное значение «неопределенно». В противном случае нA будем считать ложным. Неопределенным предложение нA быть не может: либо оно истинно, либо оно ложно. Отсюда вытекает, что предложения A и нA не могут быть вместе истинными, зато могут быть вместе ложными. Последний случай будет иметь место при ложном A.

Предшествующие рассуждения позволяют заключить, что $\forall$x(нP(x, КГ) $\vee$ $\neg$P(x, КГ)). Вместе с тем, несомненно $\forall$y$\exists$x P(x,y). Снимая квантор общности в последнем предложении на имя «Каспар Гаузер», получаем: $\exists$xP(x, КГ). Попытавшись применить правило прямого удаления квантора существования, приходим к P(εxP(x, КГ), КГ). Теперь в предложении $\forall$x(нP(x, КГ) $\vee$ $\neg$P(x, КГ)) снимем квантор общности на ε-терм εxP(x, КГ): нP(εxP(x, КГ), КГ) $\vee$ $\neg$P(εxP(x, КГ), КГ). Поскольку некоторый человек, являющийся родителем Каспар Гаузера, не может не быть его родителем, последний дизъюнктивный член должен быть оценен как ложный. Следовательно, истинно нP(εxP(x, КГ), КГ). Но предложения P(εxP(x, КГ), КГ) и нP(εxP(x, КГ), КГ) не могут быть вместе истинными!

Возникшая коллизия является результатом принятия правила прямого удаления квантора существования. Ситуация в действительности носит не частный характер, а имеет отношение к целому пласту реальных рассуждений в обыденной жизни и науке. Что касается науки, то речь идет о дисциплинах, которые (следуя терминологии В.Виндельбанда) можно назвать идиографическими в противоположность номотетическим. Идеалом науки является стремление к точности. Но как эту точность понимать? Не всякие представления о точности оправданы с теоретической и практической точек зрения. Например, представление о том, что любой феномен допускает строгое описание на языке чисел, в настоящее время уже не находит столько приверженцев, как это было раньше. В логике стремление к достижению бульшей строгости нашло выражение в требовании конструктивности рассуждений. Даже их формализация здесь не является решающим моментом.

Конструктивность в интересующем нас аспекте связана с особой трактовкой утверждений с квантором существования и дизъюнкцией[11]. Классического доказательства формул вида $\exists xA(x)$ и $(A \vee B)$ здесь недостаточно. Неконструктивность классической логики легче всего продемонстрировать на примере закона исключенного третьего. В классической логике принимается, что формула $A \vee \neg A$ истинна при любом суждении A, причем A либо истинно (тогда $\neg A$ ложно), либо ложно (тогда истинно $\neg A$). Однако классическая логика далеко не всегда позволяет получить ответ на вопрос, какое именно суждение истинно – само A или его отрицание. Несмотря на то, что имеются существенные разногласия в подходах к анализу понятия конструктивности, нашедшие выражение в создании различных систем конструктивных логик, общим остается требование считать дизъюнкцию $A \vee B$ доказанной лишь в том случае, если предъявлено доказательство по крайней мере одного из членов дизъюнкции. Еще один источник неконструктивности классической логики связан с квантором существования. Доказательство высказывания $\exists xA(x)$ с использованием классической логики может содержать неопределенность в отношении того объекта, существование которого утверждается. Речь идет о так называемых «чистых теоремах существования», из доказательства которых невозможно извлечь информацию о способах эффективного построения искомого объекта.

В конструктивных рассуждениях (например, в интуиционистской логике) наличие доказательства формулы вида $(A \vee B)$ означает, что мы располагаем доказательством по крайней мере одного из ее членов (свойство дизъюнктивности), а утверждение вида $\exists xA(x)$ считается доказанным лишь при условии, что имеется терм t, для которого доказано суждение $A(t)$ (свойство экзистенциальности)[12]. Хотя классическая логика не удовлетворяет названным свойствам, любую основанную на ней теорию T всегда можно пополнить таким образом, чтобы расширенная теория T′ была дизъюнктивной и экзистенциальной. Правда, само такое расширение осуществляется неконструктивным образом и потому интуиционистски неприемлемо. В существенно неконструктивных рассуждениях в условиях неопределенности указанное расширение в общем случае осуществить невозможно в принципе. Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, когда неконструктивная со стандартной точки зрения классическая логика оказывается слишком конструктивной!

Как было показано выше, доказательство (в рассмотренном примере со ссылкой на эмпирический закон) утверждений о существовании некоторых объектов не означает, что у нас имеется возможность предъявить эти объекты, даже если область рассуждений охватывает только конечное число индивидов. Последнее замечание также демонстрирует необычность ситуации, поскольку считается несомненным, что коль скоро задано конечное множество объектов K, то тем самым заданы и все подмножества множества K и его декартова произведения $K \times K$, представляющие соответственно всевозможные свойства и бинарные отношения на K. Ясно, в частности, что свойство «Родитель(x, КГ)» является подмножеством конечного множества людей, обстоятельства и время жизни которых не исключали возможности оказаться в роли одного из родителей Каспара Гаузера. Однако, как мы убедились, свойство «Родитель(x, КГ)» нельзя задать предъявлением двух его элементов. Поэтому стремление к строгости, выраженное идеалом конструктивности, оказывается нереализуемым. Представление о реальности как о вполне определенном образовании наталкивается на ограничения, поставленные самой природой вещей. Тем не менее, это не означает, что не следует стремиться к точности и строгости рассуждений в существенно неконструктивном случае. Просто идеал строгости не должен быть связан только с конструктивностью. Требуемая строгость, на наш взгляд, может быть достигнута за счет применения формальных методов анализа.

Пусть L – язык исчисления предикатов первого порядка произвольной сигнатуры, не содержащий функциональных констант[13]. Будем обозначать символом Lн язык, отличающийся от L лишь наличием формул вида нA, где «н» – новый одноместный логический оператор.

Структурой для языка Lн назовем пару Mн = (U,{Fi} $i \in J$), где J – множество индексов, такую, что:

а) $|J| > 1$;

б) $Fi \neq Fj$, если $i \neq j$;

в) каждое Mi = (U, Fi) является структурой[14] для языка L;

г) если *c* – индивидная константа, то Fi(*c*) = Fj(*c*) для всех i,j∈J.

Областью определения всех функций интерпретации Fi (i∈J) является множество дескриптивных символов языка Lн, а области значений различаются для каждой функции. Неформально говоря, структура для языка Lн – это не менее, чем двухэлементное множество стандартных структур для языка L, имеющих один и тот же универсум и отличающихся друг от друга интерпретацией хотя бы одного предикатного (но не индивидного) символа языка L.

Оценка f определяется обычным образом: это отображение множества индивидных переменных языка L в универсум U. Если A – формула языка L, то определение выполнимости A в структуре (U, Fi) при оценке f стандартное. Расширим его на случай формул вида нA: формула нA *выполнена* в структуре (U, Fi) при оценке f, если существуют j,k ∈ J такие, что A выполнена в (U, Fj) при f и A не выполнена в (U, Fk) при f.

Формула A в структуре Mi = (U, Fi) *принимает значение* 1 (0), если A (не) выполнена в Mi при любых f.

Каждую структуру Mi = (U, Fi) из структуры Mн = (U, {Fi} i∈J) будем называть *возможным миром* из Mн, поскольку эти структуры попарно отличаются интерпретацией хотя бы одной предикатной (но не индивидной) константы.

Формула A в структуре Mн = (U,{Fi} i∈J) *принимает значение* 1 (0), если A принимает значение 1 (0) в каждом из возможных миров; если же A принимает значение 1 в одних возможных мирах и значение 0 во всех остальных возможных мирах, то A *принимает значение* 1/0 в Mн. Значение 1 отождествляется с истинностью, значение 0 – с ложностью, а значение 1/0 – с неопределенностью.

Иначе говоря, в структуре Mн = (U, {Fi} i∈J) формула A *истинна* (принимает значение 1), если для всех i∈J A истинна (принимает значение 1) в (U,Fi); A *ложна* (принимает значение 0), если для всех i∈J A ложна (принимает значение 0) в (U,Fi); наконец, A *неопределенна* (принимает значение 1/0), если существуют j,k ∈ J такие, что A истинна (принимает значение 1) в (U, Fj) и A ложна (принимает значение 0) в (U, Fk), и при этом для каждого i∈J либо A истинна (принимает значение 1) в (U,Fi), либо A ложна (принимает значение 0) в (U,Fi).

Пусть T – множество формул языка Lн и Mн – структура для Lн. Назовем Mн *моделью* T, если все формулы из T истинны в Mн. Если T одноэлементное множество, будем говорить о модели соответствующей формулы.

По определению, Lн-*теория* – это произвольное подмножество множества предложений языка Lн. Lн-теории оказываются существенно неконструктивными (или *антиконструктивными*) в следующем смысле.

Предложение. Существует Lн-теория T такая, что а) (P*c* ∨ ¬P*c*) ∈ T, б) ∃xPx ∈ T, в) T имеет модель; но Lн-теории T∪{Pa}, T∪{¬Pa} не имеют моделей, какова бы ни была индивидная константа a ∈ Lн.

Пусть Lн = {P, *c*}, где P – одноместный предикатный символ, а *c* – индивидная константа, и Mн=({a,b}, {Fi} i∈{0,1}), $F_0(c)=F_1(c)=a$, $F_0(P)=\{a\}$, $F_1(P)=\{b\}$. Ясно, что Mн – модель Lн-теории T={(P*c* ∨ ¬P*c*), ∃xPx, хнPx}. Но ни T∪{P*c*}, ни T∪{¬P*c*} моделей не имеют, как бы мы ни определяли значение Fi(*c*) в произвольной структуре Mн для языка Lн.

Действительно, истинность предложения ∀хнPx в модели Mн=(U,{Fi} i∈J) теории T влечет, что ∀хнPx выполнена в Mi = (U, Fi) для каждого i∈J при всех оценках f. Но выполненность ∀хнPx в Mi=(U, Fi) при всех f означает, что нP(x) выполнено в Mi=(U, Fi) при всех f. Следовательно, при любой оценке f найдутся j,k ∈ J такие, что формула P(x) выполнена в (U, Fj) при f и P(x) не выполнена в (U, Fk) при f. Отсюда получаем, что какова бы ни была интерпретация индивидной константы *c*, найдутся индексы j,k, для которых предложение P(*c*) будет выполнено в (U, Fj) и не выполнено в (U, Fk), то есть P(*c*) будет истинно в (U, Fj) и ложно в (U, Fk). Значит, в любой модели теории T истинным будет предложение нP(*c*), а предложение P(*c*) получит неопределенную оценку 1/0. Так как для всякого A оценка 1/0 влечет принятие значения 1/0 и для ¬A, ясно, что предложение ¬P(*c*) также не может быть истинным ни в какой модели теории T, что и требовалось доказать.

Итак, рассмотренная Lн-теория T не может быть расширена таким образом, чтобы полученные расширения удовлетворяли свойствам дизъюнктивности и экзистенциальности. Теперь правило прямого удаления квантора существования ∃xA(x) ⇒ A(εxA(x)), принимаемое в натуральных ε-исчислениях, уже не воспроизводит отношения логического следования при стандартном понимании семантики выражений с ε-термином. В самом деле, формула

∃xA(x) теории T истинна в построенной модели, однако, независимо от того, какой индивид будет взят в качестве значения ε-выражения εxA(x), утверждение A(εxA(x)) уже не будет истинным, что нарушает общепринятое требование «из истинных посылок – истинное заключение».

---

[*] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 97-06-80360.

[1] Подробнее см.: *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979.

[2] *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления. М., 1972.

[3] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Теория доказательств. М., 1982.

[4] Там же. С. 30.

[5] Отметим следующие работы В.А.Смирнова: Theory of quantification and ε-calculi //Essays on Mathematical and Philosophical Logic. Dordrecht, 1979. P. 41-47; Cut elimination in ε-calculus //Book of abstracts, N. 1. XIX World Congress of Philosophy. Section 4. M., 1993; Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования //Логические исследования. Вып. 3. М., 1995. С.163-173; Логика и компьютер. Вып. 3. Доказательство и его поиск. М., 1996. (в соавт.).

[6] Формальный вывод и логические исчисления. С. 217.

[7] Логика и компьютер. Вып. 3. Доказательство и его поиск. С. 139-140.

[8] См.: Формальный вывод и логические исчисления. Гл. 7.

[9] *Смирнов В.А.* Поиск доказательств в натуральном интуиционистском исчислении предикатов с ε-символом и предикатом существования // Логические исследования. Вып. 3. М., 1995. С.163-173.

[10] См., напр.: Великие тайны прошлого. Reader's Digest, 1996. С. 334-340.

[11] Как известно, в конечном случае квантор существования можно элиминировать при помощи дизъюнкции.

[12] См., напр.: *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. М., 1979.

[13] Это не приводит к потере общности, поскольку каждую n-местную функциональную контанту можно представить в виде n+1-местного предикатного символа.

[14] См. *Шенфилд Д.* Математическая логика. М., 1975.