Проблема эмпирического базиса геометрии в трудах А. Пуанкаре

О.А. НИКОНОВ

В философии Аристотеля появилось новое понимание математического мышления, которое известно сегодня под названием математического эмпиризма. В основе этой концепции лежит убеждение в первичности опытного знания[1]. Математика, по Аристотелю, является наиболее абстрактной наукой: если физик отвлекается от всех качеств тел, кроме движения, то математик отвлекается и от движения, оставляя в сфере своего внимания только фигуры и числа. Математик строит особый идеальный мир, основанный на абстрагировании. Этот мир не является независимым от чувственных вещей, он принимается в качестве независимого лишь условно, для ясности и простоты рассмотрения интересующих нас свойств. Вещи остаются первичными для математики и определяют ее содержание.

Значительное число ученых и в настоящее время придерживается в своей сути аристотелевских воззрений на математику: они считают, что математика вторична по отношению к физике, что исходные математические объекты есть лишь абстрактные схемы предметов реального мира. С этой точки зрения математика – абстрактная физика, отвлеченная от анализа сил и движений, одна из наук о природе, и именно по этой причине она с успехом прилагается к описанию природы.

Геометрические знания человека стали формироваться на весьма ранних этапах развития его мыслительной деятельности. Они накапливались под прямым воздействием практической необходимости и трудовой деятельности и представляли собой абстракции форм предметов, с которыми приходилось иметь дело, – так кратко можно представить путь становления абстрактного мышления. «Разум пользуется своей творческой силой только тогда,

[1] Аристотель. Метафизика // Соч. в 4 т. М., 1972. Т. 1. С.365.

когда опыт принуждает его к этому»[2].

Дальнейшее развитие геометрических знаний, а затем геометрической науки, происходило в основном по следующим главным направлениям:

– измерительная и конструктивная практика;

– участие геометрии в комплексных исследованиях явлений и процессов материального мира разнообразными математическими средствами;

– теоретические обобщения и построения геометрических систем.

Проблема эмпирического базиса геометрии связана с задачей установления тех простейших допущений, из которых вытекают все метрические свойства пространства. Вполне вероятно, что эта цель не может быть полностью достигнута, так как нелья исключать возможность существования нескольких систем простых допущений. Допущения, о которых здесь идет речь, не являются (как и всякие допущения) необходимыми; достоверность их носит эмпирический характер; они – не что иное, как гипотезы. Их правдоподобие надлежит подвергнуть исследованию и затем судить о том, могут ли они быть распространены за пределы наблюдения как в сторону неизмеримо большого, так и в сторону неизмеримо малого.

Концепция априоризма сформировалась в XVII–XVIII вв., она в определенной степени является возвращением к пифагорейскому различию чувственного и умопостигаемого знания, при котором математика объявляется принципиально внечувственным знанием, основанным на специфической интеллектуальной или чистой чувственной интуиции.

И. Кант утверждал, что представления о структуре пространства, соответствующие эвклидовой геометрии, являются априорными, врожденными представлениями, теми начальными условиями, на основе которых формируется и складывается человеческий опыт[3]. Суть кантовского априоризма заключается в тезисе о том, что каждый человек, начиная процесс познания, заранее обладает некими существовавшими уже до этого процесса формами, которые и придают его знанию характер искомого идеала – необходимости и всеобщности.

Априористские идеи в философии вступили в противоречие с результатами исследований Н.И. Ло-бачевского, показавшими, что не существует априорных знаний о свойствах пространства, что они определяются выбранной системой аксиом и постулатов.

Если мы примем «пятый постулат» Эвклида (например, в форме «на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит только одна прямая»), то придем к выводу, что пространство описывается эвклидовой геометрией, из которой следует, в частности, что существуют подобные фигуры, а сумма углов в любом треугольнике равна двум прямым.

[2] Пуанкаре Анри. О науке. М., 1983. С. 28.
[3] Кант И. Критика чистого разума. М., 2006. С. 66.

Что касается аксиоматики геометрии Лобачевского, то В.Ф. Каган пишет: «Следуя Даламберу, Лобачевский никаких аксиом в «Геометрии» не вводит. Это он выдерживает и во всех своих сочинениях. Даже в «Новых началах», одну из главных задач которых составляет систематическое построение всей геометрии, нет аксиом, по крайней мере, в явном виде они не выражены»[4].

Если же мы примем постулат Лобачевского, а именно, что «на плоскости через точку, лежащую вне прямой, проходит множество параллельных прямых, не пересекающихся с данной прямой», то мы придем к другой геометрии – геометрии Лобачевского – и к совсем другим выводам о свойствах пространства. Мы должны будем признать, что вообще не существует подобных фигур, в том числе подобных треугольников, и сумма углов треугольника зависит от длин его сторон. Лобачевский утверждал, что вопрос о том, какая из геометрий является истинной (или, если точнее, – какая из геометрий лучше описывает свойства окружающего нас мира), может быть решен – в принципе – на основе опыта. Опыт и астрономические измерения, проведенные им, показали, что в пределах точности тогдашних геодезических и астрономических измерений геометрии Эвклида и Лобачевского равноправны.

Исследования Н.И. Лобачевского изменили сущность аксиоматического подхода к построению научной теории. Раньше считалось, что в качестве аксиом, лежащих в основании теории, следует выбирать ясные, очевидные, не подлежащие сомнению истины – такие как аксиомы Евклида: «целое больше части», «равные одному и тому же равны между собой».

«Всякое заключение предполагает наличие посылок; посылки же эти или сами по себе очевидны и не нуждаются в доказательстве, или могут быть установлены, только опираясь на другие предположения. Но так как этот процесс не может продолжаться бесконечно, то всякая дедуктивная наука, и в частности геометрия, должна основываться на некотором числе недоказуемых аксиом»[5].

На рубеже XIX и XX веков широкую известность приобрел конвенционализм. Лидерами этого направления в философии науки стали французский математик Пуанкаре и бельгийский историк физики Дюгем. Оба полагали, что специфика науки определяется использованием соглашений, которые, однако, не являются произвольными.

В связи с появлением неевклидовых геометрий А. Пуанкаре охарактеризовал системы аксиом различных математических теорий как соглашения, которые находятся вне поля истинности или ложности. Предпочтение одной системы аксиом другой обусловлено

[4] Каган В.Ф. Сочинения Н.И. Лобачевского, предшествовавшие «Геометрическим исследованиям» // Лобачевский Н.И. Геометрические исследования по теории параллельных линий. М.-Л., 1945. С. 9.

[5] Пуанкаре Анри. О науке. М., 1983. С. 32.

принципом удобства. Единственное ограничение на их произвольный выбор состоит в требовании непротиворечивости.

Эмпирическое обоснование аксиоматического метода евклидовой геометрии мы находим в работах А. Пуанкаре, он пишет: «…рассуждения ведутся постоянно так, как если бы геометрические фигуры были подобны твердым телам. Следовательно, вот что заимствовала геометрия у опыта: свойства твердых тел. Следовательно, если бы не было твердых тел в природе, не было бы и геометрии»[6].

Рассматривая вопрос опытной проверки геометрии, А. Пуанкаре пишет: «Мы производим опыт не над свойствами пространства, а над свойствами как того материала, из которого приготовлен этот диск, так и того, из которого сделан метр, служащий для измерений»[7].

Свойства света и его прямолинейное распространение также были стали основанием для некоторых предложений геометрии, в частности проективной геометрии; так что с этой точки зрения можно было бы сказать, что метрическая геометрия есть изучение твердых тел, а проективная геометрия – изучение света.

Многие исследователи полагают, что некоторые тезисы геометрии, допускают опытную проверку. Так, к примеру, если справедлива геометрия Лобачевского, то параллакс очень удаленной звезды будет конечным; а если справедлива геометрия Римана, то он будет отрицательным. Таким образом, можно было бы надеяться, что астрономические наблюдения могут решить выбор между тремя геометриями.

Тем не менее, в астрономии прямой линией называется просто траектория светового луча. Следовательно, если бы удалось бы открыть отрицательные параллаксы или доказать, что все параллаксы больше известного предела (хотя сомнительно, что мы можем это ожидать), то нам необходимо было бы делать выбор между двумя заключениями: мы могли бы отказаться от евклидовой геометрии или изменить законы оптики и допустить, что свет распространяется не в точности по прямой линии. Конечно, наиболее вероятен второй сценарий, поскольку такое решение удобнее. Таким образом, евклидовой геометрии не следует опасаться новых опытов[8]. Для нас же важно, что опыт не может разрешить проблему выбора между Евклидом и Лобачевским. Наши опыты, какими многочисленными они не были бы, обнаруживают только взаимные отношения тел; никакой опыт не даст и не может дать указаний об отношениях тел к пространству или о взаимных отношениях различных частей пространства. Таким образом, опыты относятся не к пространству, а к телам[9]. Пуанкаре считает, что в силу естественного отбора наш ум приспособился к условиям

---

[6] Там же. С. 48.
[7] Там же. С. 64.
[8] Там же. С. 64.
[9] Там же. С. 60.

виям внешнего мира, что он усвоил геометрию, наиболее выгодную для вида, или, другими словами, наиболее удобную[10].

Таким образом, трудность остается в силе, и она непреодолима. Если бы геометрия была опытной наукой, она не была бы наукой точной и должна была бы подвергаться постоянному пересмотру. «Итак, геометрические аксиомы не являются ни синтетическими априорными суждениями, ни опытными фактами. Они суть условные положения (соглашения): при выборе между всеми возможными соглашениями мы руководствуемся опытными фактами, но самый выбор остается свободным и ограничен лишь необходимостью избегать всякого противоречия. Поэтому-то постулаты могут оставаться строго верными, даже когда опытные законы, которые определяли их выбор, оказываются лишь приближёнными.

Другими словами, аксиомы геометрии (я не говорю об аксиомах арифметики) суть не более чем замаскированные определения»[11].

Это изменение в основаниях геометрии привело к тому, что аксиоматический подход к построению научной теории стали проводить по другому: сначала строится система аксиом, которым должны удовлетворять исследуемые объекты или операции над ними, затем из аксиом выводятся следствия и на основе этих следствий исследуются свойства объектов, удовлетворяющих введенным аксиомам. При этом не предполагается, как это было в евклидовой геометрии, что аксиомы необязательно должны быть очевидными.

Из ранее сказанного А. Пуанкаре делает следующие выводы: «Мы видим, что опыт играет необходимую роль в происхождении геометрии; но было бы ошибкой заключить, что геометрия – хотя бы от части – является экспериментальной наукой.

Если бы она была экспериментальной наукой, она имела бы только временное, приближённое – и весьма грубо приближенное! – значение. Она была бы только наукой о движении твердых тел. Но на самом деле она не занимается реальными твердыми телами; она имеет своим предметом некие идеальные тела, абсолютно неизменные, которые являются только упрощенным и очень отдаленным отображением реальных тел.

Понятие об этих идеальных телах целиком извлечено нами из недр нашего духа, и опыт представляет только повод, побуждающий нас, его использовать.

Предмет геометрии составляет изучение лишь частной «группы» перемещений, но общее понятие группы существует раньше в нашем уме, по крайней мере, в виде возможности. Оно присуще нам не как форма нашего восприятия, а как форма нашей способности суждений. Надо только среди всех возможных групп выбрать ту, которая служила бы, так сказать, эталоном, с которым мы соотносили бы реальные явления. Опыт

---

[10] Там же. С. 62.
[11] Там же. С. 54.

направляет нас при этом выборе, но не делает его для нас обязательным; он показывает нам не то, какая геометрия наиболее правильна, а то, какая наиболее удобна»[12.]

Отсутствие возможности «внеш-ней» проверки геометрических теорем и превращает аксиоматический метод в естественный способ построения науки о свойствах фигур и тел.

Исходным пунктом рассуждений Пуанкаре была мысль о том, что истинность математических теорий (например, евклидовой и неевклидовой геометрий) не опровержима опытным путем. Это утверждение у большинства исследователей не вызывает сомнений. Критику вызвало другое положение Пуанкаре: при объяснении физических явлений можно избрать любую геометрию, но с прагматической точки зрения лучше руководствоваться той, которая проще.

Против этого тезиса можно выдвинуть возражение: при математическом моделировании физических явлений математика включается непосредственно в физику, а истинность физических теорий устанавливается опытным путем. Так в процессе становления классической механики с принципом относительности Галилея и преобразованиями Галилея евклидова геометрия стала математическим аппаратом, а значит и составной частью физической теории. То же самое можно сказать и о псевдоевклидовой геометрии Г. Минковского, ставшей составной частью специальной теории относительности. Эмпирический базис этих теорий, на наш взгляд, является одновременно и эмпирическим базисом соответствующих областей геометрии. Математические истины неопровержимы даже в составе физической теории. Определенную ясность в обсуждаемый вопрос внес Г. Рейхенбах. Он показал, что от выбора геометрической теории в физике зависит постулирование наличия особого типа так называемых универсальных сил, материальные носители которых невозможно определить. Исключение из рассмотрения универсальных сил приводит к определению геометрии единственным образом[13].

По мнению Пуанкаре, геометрия не является ни опытной, ни априорной наукой, а состоит из условных конвенциональных положений. «Никакая геометрия не может быть более истина, чем другая; та или иная геометрия может быть только более удобной…»[14].

На наш взгляд, многие положения Пуанкаре являются правильными и обоснованными. Тем не менее, представляется, что он не проводил очень важного различия между случаями, когда геометрия понимается как математическая теория и когда она включается в состав физической теории и тем самым перестает существовать в прежнем, математическом виде. В качестве математической теории геометрия не является ни

---

[12] Там же. С. 53.
[13] Рейхенбах Т. Философия пространства и времени. М., 2003. С. 45.
[14] Пуанкаре Анри. Указ. соч. С. 53.

экспериментальной, ни априорной, а действительно лишь условной, т.е. принятой в качестве соответствующей критериям математического знания. В математике евклидова геометрия столь же безупречна, как и неевклидова, т.е. тезис Пуанкаре о том, что ни одна из геометрий не является более истинной, если их рассматривать в данной плоскости, справедлив. Но как только геометрия включается в физику, ее статус становится иным. Здесь появляются основания для выбора одной из геометрических систем, и эти основания отнюдь не сводятся к критерию удобства (хотя и его следует принимать во внимание), что противоречит представлениям Пуанкаре. Теперь факты резко сужают возможности выбора теоретических средств, именно определенность фактов вынуждает, например, физиков описывать явления тяготения с помощью неевклидовых построений и использовать многомерные (а не любые) геометрии в физике элементарных частиц. Но диктуют ли факты вполне однозначную формулировку теорий, на основе которых, напоминаем, истолковывается природа самих фактов?

Отрицательный ответ на этот вопрос дается в рамках так называемого тезиса Дюгема-Куайна. Согласно этому тезису, научная гипотеза не может быть окончательно ни верифицирована, ни фальсифицирована, ее всегда можно подкорректировать так, чтобы она соответствовала экспериментальным фактам. Тезис Дюгема-Куайна считается современной формулировкой концепции конвеционализма. Многочисленные попытки показать либо несостоятельность, либо неопровержимость конвеционализма до сих пор не дали однозначного результата.

В связи с этим, математика вновь стала пониматься как неэмпирическое знание, полученное на основе очевидности разума.