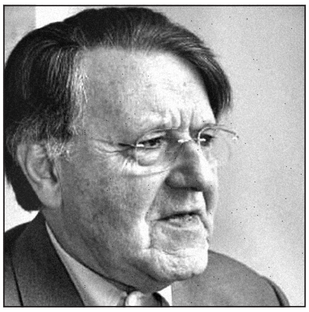
# Влияние Гёделя на философию математики

*ЭВАНДРО АГАЦЦИ*



Статья рассматривает следствия из известной теоремы К. Гёделя о семантической неполноте формализованной арифметики, имеющие общее значение для философии математики. Автор главным образом исследует влияние этой теоремы на так называемую формалистскую программу Гильберта. Переходя к более общей критике формализма, автор утверждает, что его реализация может привести к превращению математики в бессодержательную интеллектуальную игру. Далее он выделяет две стратегии преодоления этого негативного результата формализма, которые обозначаются им как реалистическая и идеалистическая. Перспективы этих стратегий рассматриваются автором в контексте как теоремы Гёделя о неполноте, так и прочих базовых результатов классической теории моделей и теории доказательств, полученных уже после указанной теоремы.

***Ключевые слова***: *теорема Гёделя о неполноте, программа Гильберта, реализм, идеализм, теория моделей, теория доказательств.*

## Общий предварительный обзор

Когда «теорема Гёделя» упоминается в общефилософских и даже популярных дискуссиях, то, что имеется при этом в виду, является скорее следствием теоремы, доказанной в знаменитой статье Гёделя 1931 г.[1], которое иногда еще называют «второй теоремой Гёделя», и в котором утверждается, что ни одна формальная система (предполагаемая непротиворечивой и достаточной для формализации элементарной арифметики) не способна описать механизм доказательства своей собственной непротиворечивости. Это утверждение можно сформулировать короче, сказав, что ни одна формальная система не в состоянии доказать свою собственную непротиворечивость. Философское значение этого следствия действительно велико, хотя различные ученые интерпретируют его неодинаковым образом. Наша цель в настоящей статье – не обсуждение этой весьма общей проблемы, а скорее набросок некоторых следствий результатов Гёделя, которые все еще имеют общий характер, но в основном в рамках особой области философии математики, и для понимания которых необязательно даже связываться с той сложной сетью подробностей, относящихся к логической технике, через которую необходимо пробиваться во время чтения оригинальных текстов Гёделя.

Гораздо более технический характер имеет содержание «основной теоремы» этой знаменитой статьи, где доказывается, что в любой формальной системе, удовлетворяющей двум упомянутым выше элементарным условиям, имеются «формально неразрешимые» суждения, т.е. суждения, которые не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты (в том смысле, что их отрицание также не может быть доказано) в рамках этой системы. Непосредственное следствие этой теоремы имеет одновременно техническое и философское значение, поскольку формально неразрешимое суждение, фактически построенное в этой статье (привычным обозначением для которого стало «G»), должно быть признано *истинным* по метатеоретическим соображениям (по сути потому, что оно недоказуемо и в то же время «утверждает» свою собственную недоказуемость). Технический аспект данного результата состоит в том, что он показывает *семантическую неполноту*, т.е. существование истинных суждений, которые не могут быть формальным образом доказаны в рамках системы, что составляет причину, по которой эта первая теорема Гёделя часто называется «теоремой о неполноте». Данное выраже-

[1] См.: *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathemtica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1931. V. 38. P. 173–198. Переиздано в английском переводе: *Gödel K.* Collected Works. N.Y., 1986. Vol. 1.

ние, однако, остается неопределенным до тех пор, пока не обозначено, неполнота *чего именно* здесь доказывается и о *какого рода* неполноте идет здесь речь. Действительно, формальная система порой называется «синтаксически неполной», если она содержит суждения, которые не могут быть формальным образом ни доказаны, ни опровергнуты в ее рамках и это, несомненно, именно то, что происходит в случае, рассматриваемом в теореме Гёделя, и выражается посредством фразы «формально неразрешимое». Но когда мы говорим о «семантической неполноте» (которая чаще всего подразумевается под «неполнотой» в логической литературе), мы должны рассматривать *истинность*, а истинность всегда предполагает некоторую *предметную* область (или *модель*), в отношении которой система предложений должна быть признана истинной (или ложной). В случае, рассматриваемом в статье Гёделя, этой областью является стандартная элементарная арифметика, так что нам следует сказать, что теорема Гёделя показывает семантическую неполноту *элементарной арифметики*.

Уже это доказательство имеет значимые следствия для философии математики, которые мы проанализируем ниже. Но данное доказательство становится еще более загадочным, если рассматривать его вместе с менее известным, но не менее важным результатом, полученным самим же Гёделем в 1930 г., а именно, доказательством *семантической полноты* первопорядковой *логики*[2]. Что означает эта полнота? Она означает, что должным образом построенное обычное исчисление первопорядковой логики позволяет нам формальным образом вывести из *любого* множества посылок *P* *все* «логические следствия» этих посылок, т.е. все суждения, которые *истинны* всегда, когда истинны все суждения из *P* (иными словами, которые истинны в *любой модели P*). Но хотя оригинальное доказательство Гёделя построено с использованием весьма богатого формализма теории типов, оно может быть воспроизведено в языке первопорядковой логики, что предполагает, ipso facto, что если *G* не доказуемо в данной системе с использованием семантически полной логики, оно не может быть «логическим следствием» аксиом этой системы. Поэтому, так как была доказана (на метауровне) истинность *G* в «стандартной» модели арифметики, отсю-

[2] См.: *Gödel K.* Die Vollständigkeit des logischen Funktionenkalküls // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1930. V. 37. P. 349–360. Переиздано в английском переводе с комментариями: *Gödel K.* Collected Works. N.Y. 1986. Vol. 1.

да следует, что имеются также *нестандартные модели* арифметики, и в некоторых из них *G* ложно. Этот результат нетривиален с точки зрения философии математики, и он связан с еще более многообещающими философскими выводами из неполноты арифметики.

В самом деле, то, что *G истинно* в стандартной модели арифметики, т.е. на *натуральных числах*, несмотря на то что оно недоказуемо из аксиом, сформулированных для того, чтобы получить теорию этих чисел, не только говорит о том, что истинное не вмещается в область доказуемого (тезис весьма интересный для теории познания и философии логики), но и подразумевает, что натуральные числа в некотором смысле *существуют* и обладают свойствами, не выявляемыми посредством формальных доказательств. Это противоречит формалистской концепции математики, проповедуемой в начале XX в. главным образом школой Гильберта. Еще один удар этой концепции нанесло упомянутое «следствие» из теоремы Гёделя. В действительности чисто формальная аксиоматическая система, созданная для описания математической теории, должна удовлетворять как минимум требованию *непротиворечивости* (т.е. не допускать вывода противоречащих суждений), и если неинтерпретированное исчисление объявляется средством описания математических объектов, то должна существовать хотя бы одна формальная система, непротиворечивость которой доказуема *непосредственно*, т.е. без обращения к более мощным теоретико-доказательственным техникам. Но именно это и оказывается невозможным в силу следствия из теоремы Гёделя. Вот почему узкий формализм потерпел историческое поражение благодаря результатам Гёделя.

После этого предварительного обзора мы можем перейти к обсуждению важнейших из затронутых выше вопросов.

## Почему требование непротиворечивости является таким важным?

Закон непротиворечия был краеугольным камнем западной философии, логики и науки в целом со времен Древней Греции. Согласно этому закону, одновременное утверждение предложения и его отрицания с необходимостью *ложно* независимо от содержания данного предложения. Применительно к системе предложений (например, к множеству аксиом) он подразумевает, что, если противоречие может быть *правильным образом выведено* из такой системы, она должна быть признана ложной просто потому, что в силу природы логики из истинных посылок *правильным образом* могут быть *выведены* только истинные заключения. Однако по причинам, которые будут рассмотрены ниже, мы не находим в существующей традиции такого применения закона непротиворечия к системам утверждений (statements). В то же время позитивные применения данного закона представлены классической процедурой «косвенного доказательства» или *reductio ad absurdum*, где для доказательства *отдельно взятого* суждения *P* доказывается, что из отрицания *P* выводимо противоречие (в явном или неявном предположении, что прочие посылки рассуждения остаются незатронутыми этим противоречием). Эта стратегия была впервые использована в 1733 г. Джироламо Саккери в его попытке получить непрямое доказательство аксиомы Евклида о параллельных прямых (или, скорее, некоторого эквивалентного ей утверждения) с помощью сведения ad absurdum двух возможных форм отрицания этой аксиомы вместо того, чтобы прямо вывести ее из оставшихся аксиом евклидовой геометрии, как это пытались сделать на протяжении предшествующих столетий. Несмотря на столь важное применение, принцип непротиворечия едва ли мыслился как средство *получения новых знаний*. В самом деле, даже в случае непрямого доказательства мы *обязаны* принять *P*, не понимая как следует, *почему* мы обязаны сделать это. Мы слышим отзвук этих рассуждений в учении Канта, определяющем закон непротиворечия как «высший принцип аналитических суждений», т.е. суждений универсальных и необходимых в силу того, что из их отрицания следует противоречие. В то же время эти суждения не сообщают ничего нового, ведь их универсальность и необходимость – лишь побочный эффект того факта, что предикат этих суждений неявно содержится в понятии-субъекте. Вот почему Кант считает, что даже в случае математики (т.е. арифметики и геометрии) одной лишь логики недостаточно для того, чтобы обеспечить их статус в качестве наук: они являются науками, поскольку применяют категории рассудка к *чистым интуициям* пространства и времени.

На протяжении XIX в. имело место постепенное ослабление роли интуиции в математике. Создание неевклидовых геометрий (которые оказались столь же непротиворечивыми, как и традиционная евклидова геометрия, несмотря на их в целом антиинтуитивный характер) показало, что интуитивная ясность не является необходимым условием непротиворечивости системы суждений. Стремление к «математической строгости», в особенности в анализе бесконечно малых, было реализовано с помощью чисто формальных определений основных понятий, снявших ряд парадоксов, связанных с интуитивными геометрическими и механическими интерпретациями этих понятий. Алгебра перестала рассматриваться как символическое представление операций над числами и превратилась в *абстрактное* изучение операций, определенных формальным образом, которые могли быть применены – если это вообще было возможно – к *произвольной* совокупности объектов. В духе этих тенденций различные математические дисциплины и их объекты рассматривались как *логические конструкции*, которые могли быть получены на основе некоторой *фундаментальной* теории, подобной элементарной арифметике или теории множеств. Для осуществления этих конструкций интуиции оказалось не просто недостаточно – она оказалась источником трудностей и противоречий (что особенно ярко проявилось в случае *антиномий*, возникших в теории множеств). Вот почему отказ от интуиции и максимизация стандартов *логической строгости* рассматривались как выражение истинной сути математики. Этот взгляд нашел свое наивысшее выражение в том, что часто называют *аксиоматической революцией*. В западной эпистемологии аксиоматический метод рассматривался как результат сочетания двух фундаментальных требований: (i) поскольку наука является «доказательным знанием», а любое доказательство должно начинаться с недоказанных в нем посылок, то некоторые «первоначальные посылки» должны быть приняты в любой науке; они-то и являются ее специфическими аксиомами или постулатами; (ii) эти первые посылки, однако, не устанавливаются произвольным образом: они не доказаны, но принимаются в силу их *самоочевидности*, «истинности самих по себе» в точном смысле этого слова, т.е. в силу того, что схватываются *интеллектуальной интуицией*. Отсюда ясно, что, как только интуиция была отброшена, это второе основание классического видения аксиоматического метода исчезает и остается только первое. Но тогда исчезают и требования истинности и референции к специфическим объектам, так что нам остаются лишь чисто *формальные системы*.

Возникает естественный вопрос: а действительно ли построение аксиоматических систем является *полностью произвольным*? Ответ на него не может быть утвердительным, поскольку абсолютный произвол в данном случае равносилен полной бесполезности. Требование, которое пришлось принять в качестве минимального, но неизбежного ограничения свободы конструирования аксиоматических систем, заключалось в их *непротиворечивости* или *совместности* не только в тривиальном смысле отсутствия прямых противоречий между их аксиомами, но в смысле *принципиальной* невозможности дедуктивного вывода противоречия из системы аксиом в целом. Теперь мы видим, почему закон непротиворечия начал рассматриваться применительно к целым системам предложений. Но как могло быть доказано наличие такого требования, особенно в ситуации, когда аксиомы рассматривались в качестве лингвистических выражений, «лишенных смысла», и, следовательно, ни истинных, ни ложных? Как ни странно, надежды получить такое доказательство пришлось возложить на радикализацию описанных выше взглядов, а именно, на рассмотрение аксиом исключительно как последовательностей *символов* или материальных *знаков*. Именно этот сдвиг в понимании аксиом обусловил появление и развитие программы наиболее известного представителя *формализма* в математике, Давида Гильберта.

## Программа Гильберта

Почему же Гильберт (и не только он) был вынужден сосредоточить свое внимание почти исключительно на «формализмах» (т.е. на чисто формальных системах)? Причина в том, что обоснование непротиворечивости математики, казалось, не могло быть получено никаким иным способом. Напомним, проблема непротиворечивости была поставлена уже в дискуссиях по поводу неевклидовых геометрий и решена с помощью *косвенного* доказательства, т.е. построения «евклидовых моделей» этих геометрий. Успех такого решения зависел от ряда неявных условий, которые не были осознаны авторами этих моделей (Бельтрами, Кэли, Клейн, Пуанкаре) и которые стали очевидны лишь в рамках гораздо более утонченной метаматематики XX в. Тем не менее их исходная интуиция была верна: если мы можем *интерпретировать* аксиомы какой-либо неевклидовой геометрии так, что они оказываются истинными относительно некоторой структуры, состоящей из геометрических объектов, которая, несмотря на свою «искусственность», все-таки подчиняется аксиомам евклидовой геометрии, то мы можем утверждать, что если противоречие следует из аксиом неевклидовой геометрии, это противоречие должно затронуть и указанную модель, а значит, оно также будет следовать и из аксиом евклидовой геометрии. Поэтому, *если* непротиворечива евклидова геометрия, такова же будет и соответствующая неевклидова геометрия. В этом случае возникает очевидный вопрос: а непротиворечива ли евклидова геометрия? Здесь можно было бы использовать ту же стратегию и построить модель этой геометрии в рамках анализа действительных чисел (используя уже знакомые техники аналитической геометрии), но таким способом проблема была бы всего лишь отодвинута, как, впрочем, и в том случае, если бы, продолжая в том же духе, ее удалось бы «свести» к проблеме непротиворечивости, скажем, элементарной арифметики или теории множеств (т.е. тех двух теорий, которые, как нам уже известно, рассматривались в качестве возможного основания для «построения» любых числовых систем, а следовательно, и математики в целом). Одним словом, для того чтобы доказать непротиворечивость геометрии, необходимо было рано или поздно дать *прямое* доказательство непротиворечивости одной из базисных математических теорий. Но какой именно и как?

Традиционной математике не была, да и *не могла быть* известна такая проблема, поскольку ее основанием считались аксиомы, *истинность* которых была *самоочевидна*. Так как использование правильных умозаключений с необходимостью предполагает, что правильным образом выведенные с их помощью следствия так же истинны, как и их посылки, следствия таких аксиом с необходимостью должны быть истинными. Поэтому противоречие, которое всегда *ложно*, никогда не может быть выведено из истинных аксиом и отмеченная проблема как таковая не возникает. Но для современной математики, как мы видели, характерно недоверие к возможности утверждения *самоочевидной истинности* какой бы то ни было аксиоматической системы, так что этот традиционный выход из создавшегося затруднения оказался под запретом. В то же время исключительно формальное понимание аксиом как чего-то, что и ни истинно, и ни ложно, придало еще более фундаментальный характер невозможности доказательства их непротиворечивости за счет обращения к понятиям истины и следствий из истины. Вот почему свою последнюю надежду на выход из этой ситуации многие связывали с возможностью выбрать некоторую систему аксиом – мыслимую исключительно в качестве комбинации символов, не имеющих отношения к смыслу и истинности и подчиненных лишь структурным правилам преобразования, – и попытаться показать ее *формальную* непротиворечивость, т.е. невозможность *вывода* в ней противоречия.

Это вызвало резкое смещение концептуального центра тяжести, поскольку теперь в поисках гарантий непротиворечивости следовало обращаться не к свойствам аксиом, но к свойствам и структуре математических доказательств. Такой шаг был в явной форме сделан Гильбертом, когда он охарактеризовал свой новый подход к проблеме непротиворечивости как *Beweistheorie* (*теория доказательств*). Поскольку понятие доказательства формально и к тому же отныне предназначалось для применения к чисто формальным системам аксиом, стала необходимой полная формализация. Это означало, что не только собственно математические аксиомы, но и логическое исчисление, используемое для построения доказательств, следовало сформулировать явным образом и в символической форме. Символизация становится не просто полезной, но и необходимой: если нашей задачей является исследование доказательств, они должны быть доступны для такого исследования, следовательно, даны в форме, допускающей их структурную проверку, что может быть обеспечено только символизацией. Можно избежать и еще одного затруднения: доказательство непротиворечивости для некоторой аксиоматической системы традиционно считалось невозможным, поскольку казалось, что оно подразумевает выполнение бесконечной задачи (если мы вывели сто или тысячу теорем из этих аксиом и не обнаружили никаких противоречий, это еще не значит, что мы никогда их не найдем).

Но один из законов *формальной* логики, известный со времен Средневековья, утверждает, что из противоречивого множества посылок правильным образом может быть выведено *любое* заключение, и этот закон имеет силу в стандартных исчислениях логики. Это означает, что доказательство непротиворечивости можно свести к установлению того, что некая *конкретная*, выбранная произвольным образом (и достаточно простая) формула, скажем, 0 = 1, не может быть формальным образом выведена в нашей системе аксиом. Напомним, что число аксиом *конечно* (и каждая аксиома состоит из *конечного* числа символов), а правила преобразования логического исчисления, использованного при формализации, обеспечивающие построение доказательств, *также конечны*. Поэтому представляется разумной надежда на то, что, манипулируя аксиомами в соответствии с техниками вывода, напоминающими приемы комбинаторики и сводящимися к конечным распределениям и перестановкам символов, можно будет показать, что данная конкретная формула невыводима. Такой не зависящий от каких-либо гипотез способ рассуждения, застрявший на полпути между манипуляцией символами как материальными объектами и их интуитивным созерцанием, был назван Гильбертом *финитным* методом или «конечным выводом» (*finites Schliessen*) и рекомендован в качестве метода получения прямых доказательств непротиворечивости любых формализмов.

Итак, мы нашли ответ на вопрос о том, «как» может быть дано такое доказательство. Второй вопрос касался того, какая именно аксиоматическая система должна быть подвергнута такому исследованию. В принципе можно было бы взять любую систему, но, принимая во внимание, что основной целью было «обоснование» математики и что исследования, проведенные в XIX в., уже выявили многообразные взаимосвязи между математическими теориями, разумно было бы выбрать простейшую из известных систем. Поэтому была рассмотрена *элементарная арифметика* в надежде дать прямое доказательство ее непротиворечивости, а затем распространить это свойство на оставшиеся базовые аксиоматизации математики, прежде всего анализа и теории множеств. Такова вкратце знаменитая «программа Гильберта», о которой было впервые объявлено в начале XX в. Точная формулировка этой программы была дана примерно в 1920 г., и далее Гильберт развивал ее в сотрудничестве с рядом своих учеников и коллег[3].

---

[3] Впервые программа была обнародована Гильбертом в 1904 г. в ходе его доклада на Международном конгрессе математиков в Гейдельберге (См.: *Hilbert D.* Über die Grundlagen der Logik und Arithmetik // Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematikerkongresses. Leipzig, 1904. Англ. перев. см. : *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. New Haven, 1967), где он также использовал неологизм *метаматематический* для характеристики своего метода исследования непротиворечивости полностью формализованной аксиоматической системы. В то время его взгляды не получили распространения и едва ли были кем-либо поняты. Гильберт выдвинул свою программу вновь и придал ей дальнейшее развитие в серии работ, опубликованных между 1922 и 1928 гг. [См.: *Hilbert D.* Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. 1922. Vol. I. P. 157–177. Переизд.]. Gesammelte Abhandlungen. Vol. III. P. 157–177; *Hilbert D.* Die logischen Grundlagen der Mathematik // Mathem. Annalen. V. 92. 151–165. Переизд.: Gesammelte Abhandlungen, 1923. Vol. III. P. 178–191; *Hilbert D.* Über das Unendliche // Mathematische Annalen. 1926. V. 95. P. 161–190; *Hilbert D.* Die Grundlagen der Mathematik // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. V. VI. P. 65–85. Переизд. как Die Grundlagen der Mathematik. Leipzig, 1928. Англ. перев. см. : *Heijenoort J. van.* Op. cit. P. 64–79; а некоторые из его выдающихся учеников, например В. Аккерман, Дж. фон Нейман и П. Бернайс, внесли свой вклад в эти труды, найдя им конкретные приложения. Несмотря на (как минимум частичную) неудачу этой программы в силу теоремы Гёделя, дух гильбертовой метаматематики и теории доказательств нашел продолжение в специфической традиции исследований в области оснований математики, которая, между прочим, нашла свое выражение в некоторых признанных справочниках в этой области, таких как *Hilbert D., Bernays P.* Die Grundlagen der Mathematik. B., 1934–1939; 2nd ed. revised by P. Bernays. B., 1968–1970. *Schütte K.* Beweistheorie. B., 1960. Англ. перев. 1977.

## Теорема Гёделя

Несмотря на свою разумность, программа Гильберта не смогла достичь ожидаемых успехов: после некоторого числа положительных результатов частичного характера, которые относились к некоторым «ослабленным» формальным системам арифметики, в 1931 г. К. Гёделем была доказана теорема[4], которая заслуженно считается одним из наиболее выдающихся результатов научной мысли XX столетия. Ее влияние на философские дискуссии, вероятно, сравнимо лишь с влиянием квантово-механического принципа неопределенности Гейзенберга. Эта теорема утверждает принципиальную невозможность реализации программы Гильберта в ее исходной форме. В самом деле, Гёдель доказал, что если формальная система *предполагается* непротиворечивой (если же она противоречива, то в ней можно вывести что угодно) и достаточно богата для формализации арифметики, то ее непротиворечивость не может быть доказана средствами, *формализуемыми* внутри самой системы. В более короткой форме можно сказать, что любая система, удовлетворяющая упомянутым минимальным ограничениям, неспособна дать «внутреннее» доказательство своей непротиворечивости. Однако, поскольку финитные методы, приемлемые с точки зрения программы Гильберта, несомненно формализуемы в любой аксиоматизации элементарной арифметики (и, *a fortiori*, в любой более богатой системе), то ясно, что программе Гильберта был вынесен приговор. Отсюда не следует, что данная программа не может быть модифицирована так, чтобы достичь своих целей, но это может быть сделано лишь посредством обращения к более мощным методам, которые, не будучи «финитными», могут все же рассматриваться как «несомненные» или надежные. Впоследствии такие методы получили название «конструктивных», и благодаря их использованию непротиворечивость арифметики (и некоторых, хотя и не всех, более сложных математических теорий) была все-таки доказана[5].

---

[4] См.: *Gödel K.* Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathemtica und verwandter Systeme I // Monatshefte für Mathematik und Physik. 1931. V. 38. P. 173–198. Перев. на англ. : *Gödel K.* Collected Works. N.Y., 1986. Vol. 1.

[5] Отметим лишь, что уже в 1936 г. Г. Генцен смог получить доказательство непротиворечивости элементарной арифметики, используя на метауровне (т.е. как «фактически» допустимую технику) трансфинитную индукцию в смысле канторовой теории множеств на «конструктивно» определимых бесконечных ординалах (на элементах ординала $\varepsilon_0$). См. : *Gentzen G.* Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie // Mathem. Annalen, 1936. V. 112. P. 493–565. Англ. перев. в: The Collected papers of G. Gentzen ; ed. by M.E. Szabo. Amsterdam, 1969. Впоследствии эта конструктивистская теория доказательств получила дальнейшее многообразное развитие.

Существует весьма обширная литература, посвященная критическому анализу результата Гёделя, и мы, конечно, не в состоянии перечислить здесь все аспекты этой критики. Тем не менее скажем несколько слов по поводу специфических проблем, затронутых в этой статье. Прежде всего следует упомянуть, что из этого результата следовало безоговорочное опровержение *формализма* в математике, т.е. учения о том, что математические теории суть «не более чем» формальные аксиоматические структуры, не обладающие ни смыслом, ни истинностью. Последнее утверждение, как мы видели, состоятельно только при условии, что данные формализмы допускают внутреннее доказательство своей непротиворечивости, чего в действительности не происходит. Доказательство непротиворечивости оказывается возможным лишь при обращении к методам, представимым в рамках некой более богатой системы (фактически, теории множеств), так что воспроизводится механизм «отодвигания» риска получить противоречие из одной системы, т.е. та самая стратегия, которую мы наблюдали на примере неевклидовых геометрий. Все это, конечно, дает лишь *относительную непротиворечивость*, тогда как требовалось доказать *абсолютную непротиворечивость*. Но раз уж необходимость использовать «внешние» средства является общей для всех формальных систем, то даже наиболее богатые из них (например, теория множеств) не могут избежать этой проблемы. Следовательно, поскольку они рассматриваются исключительно как формализмы, в математике может быть доказана лишь относительная непротиворечивость (т.е. установлено некое взаимное отношение между различными математическими теориями), доказать же абсолютную непротиворечивость ни для отдельной теории, ни для математики в целом невозможно.

Можно подойти к этой проблеме по-другому и заявить, что техники, использованные в доказательстве непротиворечивости, скажем, арифметики, несомненно формализуемы в некоторой математической теории. Тем не менее они не подлежат сомнению и надежны *сами по себе*, независимо от этого случайного факта. Эта позиция аналогична позиции, которую занял Гильберт в отношении своих финитных методов, но как следует ее понимать в данном случае? Нельзя отрицать, что она представляет собой некое возвращение к *интуиции* и в этом смысле также отрекается от программы изъятия интуиции из математики, стоявшей, как мы видели, у самых истоков формализма. Эта тенденция особенно четко проявляется в практике решения вопроса о непротиворечивости, которая получила общее распространение в период, наступивший после открытия Гёделя. Мы имеем в виду практику нахождения *модели*, в которой выполнены, т.е. *истинны* при соответствующей интерпретации, аксиомы системы. Эта стратегия была поддержана результатами Тарского[6], которые придали строгость понятию интерпретации формального языка, и впоследствии развилась в такую важную отрасль математической логики, как *теория моделей*. В этом случае мы имеем оправдание «классического» подхода к математике: если ее аксиомы «истинны» относительно чего-то, то мы можем считать себя застрахованными от появления противоречий, ведь они не могут быть выведены из истинных предложений. Конечно, здесь все еще можно сказать, что в конечном счете модели строятся с помощью методов, формализация которых требует использования теории множеств, так что по сути их существование и свойства зависят от этой теории. Но если мы смотрим на дело таким образом, то мы вновь возвращаемся к невозможности доказать непротиворечивость этой теории.

Есть и еще одно решение. Когда Гильберт согласился признать несомненную надежность финитных методов, он особенно подчеркивал их материальный, эмпирический характер, так что можно сказать, что он допустил в некоторой форме чувственную интуицию, отказываясь в то же время от интуиции интеллектуальной (уже известная позиция, в особенности характерная для Канта). К сожалению, техник, основанных на «материальной интуиции», оказалось недостаточно. Но тогда мы можем спросить: а нельзя ли считать «конструктивные» методы, поддержанные более поздними адептами теории доказательств, также «материально интуитивными»? Это весьма и весьма спорный вопрос.

Наконец, рассмотрим методы, использованные в доказательстве теоремы Гёделя (а равным образом и в других аналогичных исследованиях по метаматематике). Данные методы сводятся к отображению алфавита формальной системы в множество натуральных чисел таким образом, чтобы всем метатеоретическим свойствам системы были автоматически сопоставлены определенные свойства натуральных чисел. Это позволяет рассматривать данные метатеоретические свойства как «материальные», т.е. не относящиеся исключительно к формализму (но лишь до того момента, пока не выяс-

[6] См.: *Tarski A.* Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen // Studia philosophica. 1936. № 1. S. 261–405. Англ. перев. : *Tarski A.* Logic, Semantics, Mathematics : Papers from 1923 to 1938 : transl. by T.W. Woodgers. Oxford, 1956.

нится, что неразрешимое предложение из доказательства Гёделя есть общезначимая истина арифметики). Значит, в исследованиях такого рода в качестве объектов чувственной интуиции надлежит рассматривать не только символы формального языка, но и натуральные числа, а также их свойства; и это также выводит нас за пределы узкого формализма.

Подводя итог настоящему обзору, отметим, что была установлена нереализуемость программы узкого формализма в математике, вследствие чего признана необходимость опоры на некую разновидность интуиции, имеющую отношение к *смыслу и референции*, несмотря на все ранее выдвинутые причины для недоверия к ним.

## Достаточность формализма

То, о чем мы говорили в предыдущем параграфе, порой называют внутренними ограничениями формализма. Можно считать, что именно они положили конец претензиям формализма на некую самодостаточность. Тем не менее отказ от таких претензий не снимает целого ряда интересных вопросов по поводу достаточности формализма для решения задач, которые обычно считаются естественной областью его приложений и могут быть описаны в целом как попытки обойтись без использования понятий смысла и значения. Отказ от их использования во многом явился результатом построения *искусственных* формальных языков по образцу абстрактных алгебраических исчислений, полностью лишенных *референции* к конкретным объектам. Эту их особенность вскоре начали обозначать как «*лишенность смысла*», в результате чего были неявно, а во многом и неосознанно зафиксированы такие понятия, как референция и смысл. Более того, поскольку формализация казалась идеальным инструментом устранения проблем с логикой, которые, по общему мнению, во множестве «гнездились» в некоторых привычных «интуициях», и поскольку эти интуиции могли быть поняты как «смыслы» (в той мере, в какой смысл можно считать содержанием некоторого интеллектуального представления), идея о том, что формализмы суть абстрактные построения, лишенные смысла, получила сильную дополнительную поддержку, уже не связанную с неявными теориями референции и смысла. В результате избавление от бремени смысла и референции, довлеющего над математикой, легко было принять за истинную причину несомненных успехов формализма. Но смысл и референция всегда рассматривались как основные предпосылки создания верной системы рассуждений, так что их устранение привело, как мы видели, к устранению *истины* из системы формальных выводов.

На первый взгляд устранение истины должно было не повысить надежность математических знаний, а полностью уничтожить их как таковые. Но в действительности все оказалось не так плохо: совокупность абстракций все-таки что-то собой представляет, а системы символов могут быть «поняты», т.е. в конечном счете за ними сохраняется какой-то смысл. Такой смысл по сути операционален, но в то же время носит чисто интеллектуальный характер. Поскольку же он относится к символическим структурам, рассматриваемым как «языки», его можно рассматривать как «синтаксический». Тот смысл, который формализм действительно устраняет из математики, может быть назван «эйдетическим» и соответствует (как свидетельствуют связи этого термина с давней философской традицией, идущей от Платона и Аристотеля к Гуссерлю) «интенсионалам» понятий и суждений, т.е. их ментальному содержанию или репрезентации.

Эти соображения показывают, что деятельность по формализации математики никоим образом не была потерей, но, напротив, приобретением в плане прозрачности соответствующих проблем для человеческого разума. Выяснилось, что абстрактное более прозрачно с точки зрения *интеллекта*, нежели интуитивное и «конкретное», а усилия, которых требовал выход за пределы эйдетической интуиции, были вознаграждены ясностью понимания, свободного от двусмысленностей и противоречий. Тем не менее есть основания опасаться, что все эти преимущества – не более чем следствие ужасающего обеднения, вызванного замыканием интеллекта на самом себе. Естественно, что как только это замыкание фактически произошло, наступает полная ясность: да и как бы мог *интеллект* не «*intell*igere» свои собственные конструкции? Но в чем же тогда смысл этого «интеллектуального постижения»? Что за знания оно может для нас открыть? Отправной точкой была попытка достигнуть более надежной формы знания относительно реальности, а конечный результат рискует оказаться лишь знанием некоторых из наших интеллектуальных игр. Отсюда видно, что проблема не в том, чтобы сделать интеллигибельность настолько банальной, чтобы свести ее к бессодержательности (emptiness), а значит, программа формализма предстает (если убрать из нее все полемические и иконоборческие интонации) как задача заменить традиционные характеристики референции, смысла и истинности чем-то, что сможет выполнять их функции и не будет ограничиваться рамками того, что мы назвали «синтаксическим» смыслом.

Существуют два способа избежать превращения интеллектуальной прозрачности в банальность. Мы о них уже упомянули, и теперь можем добавить, что эти способы могут быть обозначены как «реалистическое» и «идеалистическое» решения соответственно. Первое из них обычно формулируется так: формальные системы лишены смысла, но им может быть *придан* смысл, и даже не один, посредством соответствующей интерпретации. Чтобы такая интерпретация не противоречила смыслу формального метода, ее следует мыслить экстенсионально, а не интенсионально. Это значит, что такая интерпретация должна напрямую связывать предметы, множества предметов, множества n-ок предметов и т.д. с выражениями формального языка без посредства интенсионального или эйдетического смысла. Можно сказать, что такой подход предполагает наряду с синтаксическим лишь «референциальный смысл», которого достаточно для того, чтобы дело не свелось к банальностям, а понятие истины было восстановлено в своих правах с помощью понятия «выполнимости». Второе решение обычно описывается так: формулы формальных систем контекстуально *предопределяют* смыслы входящих в них исходных понятий, а эти понятия образуют в то же время объекты системы рассуждений. Мы назвали эту позицию идеалистической, потому что она разделяет основной принцип идеализма: предметы и референты языковых выражений не существуют «вне» мышления, они полностью определены мышлением и только мышлением. На это можно сказать, что в рамках формализма рассматривается язык, а не мышление; однако раз уж этот язык рассматривается не просто как груда материальных знаков, но скорее как некая структура, которой придан «синтаксический смысл», то фактически постулируется способность этого смысла целиком и полностью взять на себя функции эйдетического и референциального смыслов, что может быть сделано без скатывания в банальности только в рамках идеалистического принципа отсутствия реальности вне конструкций мышления.

## Оценка стратегии реализма

Попробуем теперь оценить успешность реализма и идеализма в их отказе от эйдетического смысла. Согласно подходу «реализма», адекватность исчисления определяется его способностью полностью описать универсум «данных» референтов или объектов. Однако некоторые широко известные теоремы математической логики показывают, что эта способность не слишком велика. С одной стороны, после доказательства Гёделем его теоремы мы знаем, что даже такая простая теория, как элементарная арифметика, является *семантически неполной*, т.е. *любая* формальная система, построенная для описания структуры натуральных чисел, будет не в состоянии распознать все их свойства (так как есть высказывания об этих свойствах, такие, как *G*, которые истинны, но не доказуемы в этой формальной системе). С другой стороны, «теорема об изоморфизме» математической логики утверждает, что если формальная система имеет модель в некоторой данной предметной области, то она имеет и бесконечно много других моделей, изоморфных данной. Отсюда видно, что формально мы в лучшем случае сможем описать *структуру* нашей предметной области. Да и это будет для нас большой удачей, ведь уже из теоремы Сколема[7] известно, что формальные системы, вообще говоря, не «категоричны», т.е. обладают моделями, которые даже не изоморфны друг другу. Последнее равносильно признанию неспособности этих систем однозначно описать хотя бы «структуру» данной предметной области (в том смысле, что все, что они могут сказать о данной области, равным образом истинно и для каких-нибудь нестандартных или не подразумеваемых обычной интерпретацией моделей). Было бы

[7] Эта теорема, известная в литературе под техническим названием «теоремы Левенгейма–Сколема», поскольку она была предвосхищена Л. Левенгеймом в 1914 г., утверждает, что если множество формул первопорядковой логики выполнимо в некоторой непустой области (т.е. имеет хоть какую-то модель), то оно выполнимо и в счетной области (т.е. имеет счетную модель). Поскольку аксиоматическая система есть множество формул, значит, любая выполнимая первопорядковая теория имеет счетную модель [см. : *Skolem T.* Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theorem über dichte Mengen // Videnskapsselskapets skrifter. I: Mathematiksnaturvidenskabelig klasse. 1920. № 4. Kristiania. P. 36ff. Англ. перев. : *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel. P. 254–263]. Это уже предполагает, что если мы предназначали нашу аксиоматизацию для характеристики конечной или более чем счетной области объектов, у нас ничего не выйдет, поскольку эта аксиоматизация будет также выполнена в некоторой счетной области (кроме того, можно доказать, что она будет иметь модели любой бесконечной мощности). Данные рассуждения получили дальнейшее развитие в работах: *Skolem T.* Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems// Norsk matematisk foreings skrifter. Series 2. Oslo, 1933. № 10. P. 73–82; *Skolem T.* Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvarablen // Fundamenta Mathematicae. 1934. V. 23. P. 150–161, где доказано, что если первопорядковая теория арифметики с равенством имеет стандартную модель, то она также имеет нормальную модель, неизоморфную стандартной. Этот результат стал истоком того, что в дальнейшем получило название *нестандартной арифметики*. А. Робинсон, применив аналогичные методы к формальной теории действительных чисел, развил теорию *нестандартного анализа* [см. : *Robinson A.* Non-standard Analysis. Amsterdam, 1966].

неуместно вдаваться здесь в технические подробности стратегий, позволяющих хотя бы частично восстановить категоричность; да и в любом случае выяснилось бы, что все такие стратегии с необходимостью жертвуют семантической полнотой. Так что эти два свойства, *вместе* связывающие систему с ее предметной областью, оказываются практически несовместимыми, а указанная связь – практически всегда неадекватной.

Наш анализ шансов «идеалистической» позиции будет более ясным, если мы сначала дадим некоторые пояснения относительно понятия семантической полноты.

## Семантическая полнота логик и теорий

Впечатление разорвавшейся бомбы, которое произвела публикация статьи Гёделя 1931 г., высветило значимость не менее важной теоремы, доказательство которой Гёдель опубликовал всего за год до этого события. В более современной терминологии это было доказательство семантической полноты первопорядковой логики. Чтобы оценить важность такого результата, примем во внимание, что *формальная логика* была создана Аристотелем как средство абсолютно надежной проверки корректности аргументов, в которых люди пытаются показать, что некоторые суждения «следуют» из некоторых предположений или «вытекают» из них не просто в силу некоторой психологической склонности соглашаться с ними, но потому, что они суть «логические следствия» этих предположений. Что касается понятия логического следования, то явного его определения мы не находим у Аристотеля и других представителей традиционной философии. Однако это понятие легко эксплицировать, определив, что суждение $P$ является логическим следствием множества суждений $S$, если и только если $P$ истинно во всех случаях, когда все суждения из $S$ считаются истинными. Фактически именно такое описание отношения логического следования стало общепринятым после создания в XX в. *семантики* как особого раздела математической логики.

Создание аристотелевой силлогистики было великим достижением и настоящим переломным моментом в истории логики, поскольку в этой системе был сформирован полный список формально-логических схем возможных комбинаций двух посылок и заключения, образующих силлогизм, с указанием тех случаев, где заключение является логическим следствием посылок, и тех случаев, где этого не происходит. Используя современную терминологию, мы могли бы сказать, что Аристотель построил *корректную* логическую систему: применение правил этой системы позволяет вывести *только* логические следствия принятых посылок. Зададимся вопросом: а достаточно ли этих правил для того, чтобы вывести *все* логические следствия произвольного множества посылок? Этот вопрос не был четко сформулирован вплоть до начала XX в., однако Аристотель явно полагал, что ответ на него должен быть утвердительным, поскольку он считал, что после соответствующих преобразований любой аргумент принимает форму силлогизма.

Вопрос, однако, был отнюдь не прост, ведь уже средневековые логики понимали, на какие неестественные и технически изощренные уловки приходится идти для того, чтобы превратить в силлогизм такое простое и незамысловатое рассуждение, как: «Круг есть геометрическая фигура, поэтому каждый, кто рисует круг, рисует геометрическую фигуру». Сегодня нам легко понять, что аристотелева силлогистика была логикой одноместных предикатов (свойств) и не касалась отношений (таких, как бинарное отношение «*X* рисует *Y*»). Поэтому мы говорим, что аристотелева силлогистика была корректной, но *семантически неполной* логической системой: имеется множество логических следствий системы посылок, которые не могут быть выведены средствами этой логики. Недостаточность традиционной силлогистики (включая те ее доработки, что были сделаны уже после Аристотеля) с течением веков стала явной прежде всего в рамках анализа математических доказательств и вызвала ряд дискуссий. Это не удивительно, ведь в математике мы сталкиваемся с отношениями буквально на каждом шагу. Но лишь Фреге в конце XIX в. удалось придать четкую формулировку проблеме отыскания системы логических правил, способных придать строгость математическим доказательствам, и он же первым разработал такую систему в виде некоторого *исчисления*, т.е. системы символов, допускающей исключительно структурные манипуляции[8]. С точки зрения более современной терминологии, исчисление Фреге эквивалентно так называемому исчислению логики предикатов первого порядка, или первопорядковой логике, и определено тем фактом, что оно содержит символы для отдельных предметов, свойств и отношений, а также правила построения выражений, в которых

---

[8] См. : *Frege G.* Begriffsschrift. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache der reinen Denkens. Nebert, Halle, 1879. Англ. перев. : *Heijenoort J. van.* From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. New Haven : Harvard Univ. Press, 1967.

свойства и отношения имеют место для определенных наборов предметов, но не дает возможности говорить о свойствах свойств или отношениях между свойствами, и квантификация допускается только по предметным переменным. Из выкладок Фреге следовала корректность его исчисления, но было ли оно еще и семантически полным? Фреге имплицитно полагал, что оно таковым было, однако он так и не смог построить соответствующего доказательства. Это доказательство было в конце концов опубликовано Гёделем в 1930 г. и оказалось достаточно сложным.

Обратимся теперь к «конкретным» теориям, т.е. к множествам предложений, нацеленных на описание свойств данной предметной области с помощью *истинных* суждений. Если мы пытаемся аксиоматизировать эту интуитивную теорию, то мы выбираем некое ограниченное число таких суждений в надежде на то, что *все* остальные истинные суждения будут выводимы из этого ограниченного множества аксиом в качестве теорем. Если это условие выполнено, то мы говорим, что данная формализованная теория *семантически полна*, в противном случае она семантически неполна. Например, в интуитивно понятой геометрии утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°, считается истинным, но его невозможно вывести в евклидовой аксиоматизации этой геометрии без постулата о параллельных прямых. Итак, нам следует признать, что отбрасывание этого постулата сделает данную геометрическую теорию семантически неполной. В своей статье 1931 г. Гёдель как раз и показал, что для любой данной аксиоматизации элементарной арифметики (т.е. теории натуральных чисел) можно с помощью метода, описанного в этой статье, построить суждение, *истинное* в стандартной модели, но не доказуемое из ее аксиом. Поэтому семантическая неполнота внутренне присуща формализациям элементарной арифметики.

Из этого результата, если он рассматривается в контексте теоремы о полноте *первопорядковой логики*, опубликованной Гёделем в 1930 г., немедленно следует один важный вывод. В самом деле, гёделево доказательство семантической неполноты арифметики может быть без труда воспроизведено в первопорядковой логике, несмотря на то что в его статье 1931 г. используется гораздо более богатая система. Значит, первопорядковая арифметика семантически неполна, притом что она использует семантически полную логику. Как это возможно? Утверждая, что неразрешимое высказывание *G* истинно в стандартной модели теории натуральных чисел, но *не является логическим следствием ее аксиом*, мы фактически признаем, что оно ложно в некоторых других моделях этой теории. Таким образом, существование нестандартных моделей арифметики неявно предполагалось результатами Гёделя еще до того, как эти модели были фактически построены.

Можно говорить и еще об одном неявном следствии теоремы Гёделя. Некоторое уточнение и формализация соображений, развитых Рихардом Дедекиндом еще в 1888 г., дают нам доказательство *категоричности второпорядковой* версии арифметики Пеано, так что перевод аксиом Пеано в язык второпорядковой логики допускает не более одной модели (с точностью до изоморфизма). Следовательно, в этой ситуации уже невозможно говорить о том, что *G* истинно в стандартной модели, но должно быть ложно в каких-нибудь других моделях, потому что их просто нет. Так что *G* есть логическое следствие этих аксиом (оно истинно во всех возможных моделях данной теории, поскольку все эти модели сводятся к одной-единственной), но не может быть выведено из них. Но это лишь означает, что второпорядковая логика, к которой относился бы такой вывод, *семантически неполна*.

## Оценка стратегии идеализма

Что касается «идеалистической» стратегии, то критерием ее успешности следовало бы считать некую способность формальной системы к «порождению» своей предметной области так, чтобы она не оставалась «лишь языком», но имела бы хоть какое-то отношение к внеязыковой реальности. Данное требование налагается вследствие того факта, что формальная система, рассматриваемая как выражение некоторой частной теории (например, элементарной арифметики) или даже намеренно сконструированная для того, чтобы получить такое выражение, рассматривается как нечто отличное от «логического исчисления» в строгом смысле этого слова. Действительно, даже в математике все, кроме логицистов, отличают «логические истины» от «математических истин», и если за логические истины принимать те суждения, которые истинны во всех возможных моделях (во всех «возможных мирах»), то следует считать, что математические истины истинны лишь в некоторых из возможных миров. Теперь мы можем уточнить нашу задачу следующим образом: для данного множества предложений, удовлетворяющего минимальному «формальному» ограничению непротиворечивости, можем ли мы быть заранее уверены, что существует хотя бы один возможный мир, в котором истинны все эти суждения? Известен ряд математиков, которые придерживались и придерживаются такого мнения; среди них и математики, которые не были склонны приравнивать существование в математике к непротиворечивости (упомянем здесь лишь Пуанкаре, который в некоторых отношениях может рассматриваться как предшественник интуиционизма, но был склонен полагать, что любое непротиворечивое множество математических предложений имеет хотя бы одну модель).

Что говорит нам об этом мнении математическая логика? Она утверждает, что если мы для какого-то формального языка можем доказать, что *любое* непротиворечивое множество *M* предложений этого языка имеет некоторую модель, то в этом языке может быть построено семантически полное логическое исчисление. Уже этот результат показывает нам, почему упомянутое выше мнение несостоятельно: если мы действительно утверждаем, что *любое* непротиворечивое множество математических предложений обладает моделью, мы должны сделать вывод, что *любое* логическое исчисление семантически полно, тогда как известно, что семантическая полнота, вообще говоря, не имеет места для исчислений в языках с б льшими выразительными возможностями, чем у первопорядковой логики. Это заключение интересно уже тем, что оно как минимум показывает, что непротиворечивость и истина в математике не могут быть отождествлены во всех отношениях, поскольку всегда остается хотя бы некоторая возможность их различить. «Реалист» сказал бы, что это очевидно, ведь рассматривать непротиворечивость как гарантию существования объекта было уж слишком претенциозно. Однако справедливости ради нам следует признать, что имеется хотя бы один возможный смысл, в котором непротиворечивое множество предложений может «создать» свою собственную модель, не претендуя при этом на сотворение ее «*ex nihilo*». Скорее это будет конструкция из компонентов, имеющихся в том самом языке, в рамках которого формулируется данное непротиворечивое множество предложений.

Такое признание будет довольно серьезной уступкой, но только в том случае, если мы сделаем эту уступку, мы будем в состоянии доказать, что любое множество *первопорядковых* предложений обладает моделью (материалом для которой служат лингвистические компоненты этих предложений). Это свойство не может быть распространено на множества аксиом, сформулированных в языках логики высших порядков[9]. Данный факт приобретает особую важность, если мы не упускаем из виду философский смысл утверждений «идеализма», а именно, что значения выражений формальной теории, такие, как натуральные числа, создаются самой формальной системой. И вот, согласно упомянутому выше результату, гарантии существования этих значений определяются не столько умением выбрать непротиворечивое множество аксиом, сколько выразительными возможностями используемого языка. Такое обстоятельство весьма странно уже само по себе, но оно становится еще более загадочным, если мы обратим внимание на то, что эти гарантии ослабевают с обогащением языка выразительными средствами. Такая зависимость противоречит самой сути любого подхода к математике, источником вдохновения которого являются идеалистические установки, ведь для такого подхода признаком «истинности» или корректности, как правило, служит универсальность системы, т.е. ее способность описывать широчайший спектр свойств и отношений различных

[9] Здесь можно возразить, что созданные Генкином техники построения модели для произвольного непротиворечивого множества первопорядковых предложений могут быть с тем же успехом применены к непротиворечивым множествам предложений высших порядков, как это, например, продемонстрировано в: *Henkin L.* The Completeness of the First-Order Functional Calculus // Journ. Symb. Logic. 1949. Vol. 14. P. 159–166; *Henkin L.* Completeness in the Theory of Types // Journ. Symb. Logic. 1950. Vol. 15. P. 81–91. Но отсюда следует, что семантическая полнота имеет силу и для второпорядковой логики, а также для теории типов. Это противоречит тому, что обычно говорится в учебниках по математической логике, и тому, что семантическая неполнота второпорядковой логики может быть, как мы показали, прямым образом выведена из конъюнкции теоремы Гёделя о полноте первопорядковой логики, его теоремы о неполноте первопорядковой арифметики и категоричности арифметики второго порядка. Даже без привлечения технических подробностей ясно, что семантическая полнота и существование модели для произвольного непротиворечивого множества предложений понимаются в этих расширениях методов Генкина в *особом и не совсем обычном* смысле, так что они не противоречат ранее приведенным нами выводам и результатам. В частности, совокупности объектов, используемые в этих расширениях, являются *нестандартными*, т.е. они обеспечивают переход от истинности посылок к истинности заключения произвольного правила вывода и для таких моделей, которые не являются максимальными. Кроме того, в них, вообще говоря, не выполнено условие экстенсиональности. Отметим, что требования, которым подчиняется конструкция таких моделей и которые оправдывают упомянутое ослабление семантических соглашений, определяются целью привести в наиболее строгое из возможных соответствий (которое, однако, не обязательно взаимно-однозначно) компоненты языка и «лингвистической» предметной области, составляющей их интерпретацию. Таким образом, компоненты языка воспроизводят свойства «лингвистической» модели, изначально созданной для непротиворечивых множеств первопорядковых предложений.

уровней (что соответствует росту выразительных возможностей и сложности самого языка)[10].

Но еще более важно следующее. При построении упомянутой выше модели используются обычные методы определения по Тарскому интерпретации и отношения выполнения выражений формализованного языка, а эти методы предполагают, что дана некая совокупность объектов, отличных от языка, который будет на ней интерпретироваться и который будет о ней «говорить». И вот это-то различие устраняется конструкцией упомянутой модели, так как совокупность ее объектов возникает из множества замкнутых термов соответствующего языка посредством некоего рода двойной «самореференции»: каждый терм понимается как метаязыковое имя для себя самого, а каждое предложение объявляется «истинным» для входящих в него термов, если и только если оно принадлежит непротиворечивому множеству *M*[11]. Так что следует как минимум принять во внимание уникальность рассматриваемой ситуации, которую можно описать следующим образом. Упомянутый результат может быть понят как утверждение о том, что хотя бы в случае первопорядковых языков каждое непротиворечивое множество предложений *M* описывает некий «возможный мир». Зададимся вопросом о том, что это за возможный мир, и ответом будет: «разумеется, мир, опи-

---

[10] Исследование точного отношения между тезисом идеализма о «холистическом» характере истинности и следующим из него учением о «внутренних отношениях», с одной стороны, и идеей о самодостаточной природе формальных систем, которая «внутренним образом» определяет формально понятые смысл и истинность всех ее компонентов, было бы весьма поучительно, хотя и завело бы нас слишком далеко. Это идеалистическое учение подверглось многочисленным улучшениям и модификациям от Гегеля до Гамелина, Бозанкета, Брэдли, Джентиле, Иоахима и др. Его изложение можно найти, например, в : *Ewing A.C.* Idealism. A Critical Survey. L., 1934. В начале XX в. Мур и Рассел яростно выступали против него. Критика Расселом «аксиомы о внутренних отношениях» нашла особенно четкое выражение в работах: *Russell B.* The Nature of Truth // Mind. 1906. Vol. 15. P. 528–533; *Russell B.* The Monistic Theory of Truth // Philosophical Essays. L., 1910. Тем не менее значительная степень семейного сходства с этим учением может быть обнаружена у «когерентистской теории истины», развитой Н. Решером. См., в особенности: *Rescher N.* The Coherence Theory of Truth. Oxford, 1973.

[11] Возможно, здесь стоит упомянуть, что модели непротиворечивых множеств первопорядковых предложений могут быть построены и без использования в качестве объектов компонентов языка, например на основе натуральных чисел. Но это не меняет ситуацию по сути, так как при построении этих моделей обычно используются методы числового «кодирования» предметных переменных языка, так что модель строится на основе этих кодов. Эта уловка не подразумевает никакой референции собственно к структуре натуральных чисел, поскольку при интерпретации данных предложений они, как и прежде, «объявляются» истинными в том и только в том случае, когда они принадлежат *M*, а не тогда, когда они выражают некоторую истину о натуральных числах в собственном смысле этого слова. Все это становится возможным благодаря экстенсионалистской семантике, которая ставит свойства и отношения модели в абсолютную зависимость от языка, никак не связывая ее со структурой данной совокупности объектов. Детальное обсуждение этих вопросов см.: *Agazzi E.* Non-contradiction et existence en mathématique // Logique et analyse. 1978. Vol. 21. P. 459–481.

сываемый *М*». Во всем этом есть некая ирония, но такое положение дел возникает лишь потому, что референциальный характер истины, предполагаемый методами Тарского, сводится здесь к пустой видимости, так чтобы не осталось никакой реальной возможности «фальсифицировать» предложения из *М.* По сути раз уж они не говорят ни о какой независимой от них структуре объектов, такие предложения застрахованы от любого рода внеязыкового или связанного с референцией к внешним объектам опровержения. Остается лишь возможность их «лингвистического» опровержения посредством противоречия, но и от него они защищены, так как множество *М* заранее *предполагается* непротиворечивым.

## Некоторые выводы

После всего сказанного уместен вопрос: а почему такой результат серьезно воспринимается в математической логике? Для этого есть как минимум две причины. Во-первых, процедура интерпретации языка через его собственные термы, хотя и несомненно «искусственна», не является абсурдной, но, напротив, с выгодой используется в других разделах абстрактной математики (например, при представлении группы через множество перестановок на некоторой совокупности элементов группы): важно лишь понимать истинный смысл этой процедуры. Во-вторых, языки высшего порядка не имеют в конце концов и такой «искусственной» модели, и этот факт тесно связан с невыполнением в общем случае условия семантической полноты для исчислений более богатых, чем первопорядковая логика.

Из приведенных выше соображений может быть сделан двоякий вывод. Во-первых, первопорядковые формализмы в состоянии обеспечить свою собственную истинность в некотором слабом смысле слова (то, что можно назвать «истинность в силу непротиворечивости»), тогда как более богатые формализмы, вообще говоря, неспособны даже на это. Во-вторых, наличие упомянутых результатов ставит некий предел как формалистским тенденциям в математике, так и приданию некоторой сверхзначимости всевозможным аксиоматизациям, позволяющим вывести (в предположении, что они непротиворечивы) множество неожиданных теорем. Основной вопрос теперь в том, действительно ли эти аксиоматизации являются математическими. Чтобы показать, что они действительно таковы, придется продемонстрировать их применимость к некоторым признанным «математическим объектам» или (если требуется избегать нетривиальных онтологических предпосылок) их применимость к решению «серьезных» математических задач. Критерием серьезности здесь служит тот факт, что эти задачи не являются «внутренними» для решающего их формализма. Вот суть реакции ряда выдающихся современных математиков на появление «необоснованных» абстракций и «бессмысленных и никому не интересных аксиоматизаций».

Что же тогда представляет собой *существование в математике*? Сам Гёдель был склонен к некоторой форме *платонизма*, т.е. к концепции, согласно которой математические объекты существуют независимо от нашего знания и наших теорий о них. Это воззрение, неявно присутствующее уже в следствиях из его теоремы о неполноте арифметики, настойчиво продвигается им и в прочих его трудах, особенно в его рассмотрении континуум-гипотезы Кантора[12]. По мнению Гёделя, некоторые математические суждения, которые на сегодня не могут быть ни доказаны, ни опровергнуты, могут и даже должны стать доказуемыми или опровержимыми после того, как будут найдены новые аксиомы, полученные в результате более глубокого понимания нашим интеллектом соответствующих математических объектов. В своих неопубликованных текстах Гёдель оставляет открытым вопрос о том, всегда ли неразрешимость таких суждений является временной (т.е. она может быть преодолена в ходе дальнейшего развития математики) или же она может в некоторых случаях быть существенной (т.е. быть обусловленной теми или иными ограничениями человеческого разума). Рассмотрение всех этих сложных вопросов лежит за пределами настоящей статьи и предполагает тщательное исследование разнообразных *онтологий*, неявно предполагаемых любым человеческим рассуждением и в свою очередь предполагающих нетривиальную, но и неоднозначную релятивизацию самого понятия существования. Обсуждение этой темы выявило бы также, каким образом онтологический вопрос о математическом существовании тесно связан с *эпистемологическим* вопросом о техниках и методах приобретения математического знания. В результате выяснилось бы, что воззрения, соперничавшие между собой в философии математики в течение последних ста лет, в действительности не противоречат, а дополняют друг друга.

*Перевод с английского Г.К. Ольховикова*

[12] См.: *Gödel K.* What is Cantor Continuum Problem? // American Mathematical Monthly. 1947. № 54/9. P. 515–525. Reprinted with English translation in the: Collected Works. N.Y., 1990. Vol. 2.