Эпистемология и философия науки
2020. Т. 57. № 4. С. 74–86
УДК 167.7
Epistemology & Philosophy of Science
2020, vol. 57, no. 4, pp. 74–86
DOI: https://doi.org/10.5840/eps202057459

Математическое мышление: концептуальное доказательство или логический вывод?*

Целищев Виталий Валентинович –
доктор философских наук,
профессор, научный
руководитель.
Институт философии
и права СО РАН.
Российская Федерация,
630090, г. Новосибирск,
ул. Николаева, д. 8;
e-mail: leitval@gmail.com

Статья посвящена сопоставлению двух типов доказательств в математической практике, методологические расхождения которых восходят к различию понимания природы математики Декартом и Лейбницем. В современной философии математики говорят о концептуальном и формальном доказательствах в связи с т.н. Тезисом Гильберта, согласно которому каждое доказательство может быть преобразовано в логический вывод в подходящей формальной системе. Анализ аргументации сторонников и противников Тезиса, «концептуалистов» и «формалистов», представлен соответственно двумя главными антагонистами – И. Рав и Дж. Аззуни. В центре внимания – вопрос о возможности воспроизведения доказательства «интересных» математических теорем в виде строгого логического вывода, в принципе осуществимого механической процедурой. Аргументация концептуалистов основана на указании важности других аспектов доказательства помимо логического заключения, а именно во введении новых понятий, методов и установлении связей между различными разделами содержательной математики, что часто иллюстрируется случаем доказательства Последней Теоремы Ферма (Рав – Y. Rav). Формалисты говорят о том, что концептуальное доказательство «указывает» на формальную логическую структуру доказательства (Аззуни – J. Azzouni). В статье высказывается догадка, что в основе разногласий лежит предположение об асимметрии взаимного перевода синтаксических и семантических структур языка, в результате которой формальное доказательство теряет важные смысловые факторы доказательства. В пользу формального доказательства указана программа унивалентных основ математики В. Воеводского, согласно которых будущее математических доказательств связано с наличием компьютерных проверочных программ. В пользу концептуальных доказательств указано (Пелк – A. Pelc), что число шагов в предполагаемом формальном логическом выводе при доказательстве «интересной» теоремы превышает когнитивные способности человека. Последнее обстоятельство выводит полемику за пределы собственно тематики математического доказательства в эпистемологическую сферу дискуссий «менталистов» и «механицистов» в вопросе о предполагаемом превосходстве человеческого интеллекта над машиной, инициированных Р. Пенроузом в его интерпретации Второй Теоремы Геделя, в числе сторонников которого, как оказалось, был и сам Гедель.

***Ключевые слова*:** математическая практика, доказательство, логический вывод, теорема, формализм, тезис Гильберта

* Статья подготовлена при поддержке РФФИ, проект № 20–011–00723.

MATHEMATICAL REASONING: CONCEPTUAL PROOF AND LOGIC CONCLUSION

Vitaly V. Tselishchev –
DSc in Philosophy, professor, research supervisor.
Institute of Philosophy and Law, Siberian Brunch, Russian Academy of Sciences.
8 Nikolaev Str., Novosibirsk 630090, Russian Federation;
e-mail: leitval@gmail.com

The article is devoted to the comparison of two types of proofs in mathematical practice, the methodological differences of which go back to the difference in the understanding of the nature of mathematics by Descartes and Leibniz. In modern philosophy of mathematics, we talk about conceptual and formal proofs in connection with the so-called Hilbert Thesis, according to which every proof can be transformed into a logical conclusion in a suitable formal system. The analysis of the arguments of the proponents and opponents of the Thesis, "conceptualists" and "formalists", is presented respectively by the two main antagonists – Y. Rav and J. Azzouni. The focus is on the possibility of reproducing the proof of "interesting" mathematical theorems in the form of a strict logical conclusion, in principle feasible by a mechanical procedure. The argument of conceptualists is based on pointing out the importance of other aspects of the proof besides the logical conclusion, namely, in introducing new concepts, methods, and establishing connections between different sections of meaningful mathematics, which is often illustrated by the case of proving Fermat's Last Theorem (Y. Rav). Formalists say that a conceptual proof "points" to the formal logical structure of the proof (J. Azzouni). The article shows that the disagreement is based on the assumption of asymmetry of mutual translation of syntactic and semantic structures of the language, as a result of which the formal proof loses important semantic factors of proof. In favor of a formal proof, the program of univalent foundations of mathematics In. Vojevodski, according to which the future of mathematical proofs is associated with the availability of computer verification programs. In favor of conceptual proofs, it is stated (A. Pelc) that the number of steps in the supposed formal logical conclusion when proving an "interesting" theorem exceeds the cognitive abilities of a person. The latter circumstance leads the controversy beyond the actual topic of mathematical proof into the epistemological sphere of discussions of "mentalists" and "mechanists" on the question of the supposed superiority of human intelligence over the machine, initiated by R. Penrose in his interpretation of the Second Theorem of Goedel, among whose supporters, as it turned out, was Goedel himself.

Keywords**:** mathematical practice, proof, logical conclusion, theorem, formalism, Hilbert's thesis

Две концепции математического доказательства

Математическая практика представлена двумя типами доказательства: содержательными и формальными. Часто первые называются концептуальными, а вторые – механическими, поскольку в концептуальных доказательствах важна семантика, а в формальных – синтаксис. Ясно, что, поскольку одно и то же доказательство имеет два представления, возникает вопрос об их соотношении. Очевидное обстоятельство заключается в том, что здесь мы имеем дело с соотношением содержательного (часто называемого концептуальным) и формализованного математического знания, интуитивной и логической компонент математического дискурса. В качестве аналога такой ситуации можно указать Тезис Черча, соотносящего интуитивное понятие эффективно вычислимой функции с математическим понятием частично рекурсивной функции. Хотя Тезис Черча имеет дело с математической проблематикой вычислимости, часто подчеркивается, что он не имеет характера чисто математического утверждения. Но проблема демаркации всегда является условной, и, например, С. Крипке считает, что Тезис Черча является вполне математическим утверждением в соответствии с общепринятым пониманием математики [Kripke, 2013]. Эта аналогия уместна уже по той причине, что различение двух представлений математического доказательства не является четко определенным и, по сути, восходит к разному пониманию Декартом и Лейбницем природы этого доказательства. Хакинг дает такое описание их взглядов: «В картезианской методологии, для того чтобы постичь истину, вы должны держать в голове все доказательство сразу… Не пробегайте быстро по моей аргументации, но осваивайте его во всей его полноте и держите его в голове. Вы должны быть способны пробежать доказательство как целое, видеть его в целом, прежде чем правильно его понять. [Хакинг, 2020, с. 42–43]… Лейбниц прозорливо нащупал концепцию доказательства, которую мы учим в курсе элементарной логики. Доказательство как конечная последовательность предложений, каждое из которых есть либо аксиома или выводится из предыдущих членов последовательности однократным применением правила вывода» [Там же, с. 45].

Лейбницевская идея замены идей вычислениями, когда «спорящие философы могут быть заменены бухгалтерами», нашла воплощение в современной концепции логического вывода как механического процесса, выполнимого «карандашом на бумаге». Это последнее обстоятельство напрямую связано с программой Гильберта, согласно которой математическое мышление должно иметь финитный характер. Это подразумевает представление доказательства в виде манипуляций с символами, что лежит в основе популярного представления о формализме Гильберта.

Тезис Гильберта

В последние годы философия математики все больше ориентируется на осмысление реальной математической практики, и одним из интересных является вопрос, в какой степени работающий математик готов увидеть в формальном выводе теоремы в духе финитизма Гильберта те идеи и соображения, которые легли в его концептуальное доказательство этой теоремы. Недавняя полемика в журнале *Philosophia Mathematica* показала, что этот вопрос является частью глубинных концепций в философии математики. Начало полемики положил И. Рав [Rav, 1999], оппонентом которого выступил Дж. Аззуни [Azzouni, 2004], которые не ограничились единичными публикациями. Полемика, к которой присоединились и другие участники, показала, что поднятые в ее ходе проблемы отнюдь не являются периферийными для современной философии математики. В центре дискуссии лежит противопоставление доказательства, как оно имеет место в практике работающих математиков, и его логического аналога, как это имеет место в формальных системах при использовании математической логики. Содержательные доказательства, опирающиеся на значение математических концепций, часто называются концептуальными, или просто доказательствами, в противопоставлении с логическим выводом в формализованном языке. Далее мы будем следовать этой практике, употребляя слово «доказательство» для неформальной математической практике а логический, или формальный, вывод – для реконструкции доказательства в формальном языке.

И. Рав бросил вызов тому, что он назвал Тезисом Гильберта, а именно взгляду, что каждое доказательство может быть преобразовано в логический вывод в подходящей формальной системе. В настоящее время под подобной формальной системой подразумевается теория с математическими аксиомами, в основе которой лежит логика первого порядка, хотя это может быть и любая другая достаточно богатая формальная система. Одной из главных задач при переводе обыденного дискурса в формальный является сохранение логической структуры, при котором сохранялась истинность при переходе от одного утверждения к другому и тем самым гарантировалась непротиворечивость всего контекста. Естественно было бы ожидать, что преобразование, о котором идет речь, было симметричным, и можно было бы из формального вывода восстановить доказательство. Однако, на чем настаивает Рав, это невозможно, поскольку восстановление исходного доказательства требует восстановления семантических элементов, которые теряются при формализации. Это обстоятельство неудивительно, принимая во внимание, что синтаксическая структура математического дискурса не изоморфна семантической его структуре.

Доказательство «интересных» математических теорем

Подтверждением этой ситуации является распространенное представление о том, что ценность доказательства состоит в введении новых понятий, методов и установлении связей между различными разделами содержательной математики. Особенно часто такое понимание ценности доказательства сопровождает описание доказательства Последней Теоремы Ферма, которое включает алгебраическую теорию чисел, численный анализ, теорию диофантовых уравнений, аналитическую теорию чисел и теорию модулярных эллиптических кривых. В подходах в рамках этих дисциплин к решению теоремы, каждый из которых приносил лишь частичный успех или даже терпел неудачу, именно анализ доказательств позволял догадываться или устанавливать межтеоретические связи. Рав утверждает, что «переход от уравнения [Ферма] к уравнению эллиптической кривой особенно поучителен: это не теорема и не результат применения логического правила. Как я постоянно подчеркиваю, такие тематические ходы являются стандартными в математическом дискурсе и обычно вводятся с невинно выглядящим императивом ‘пусть…’, или ‘представим’… Я уже упоминал о таких шагах как ходах по аналогии с ходами в шахматах. Ходы делаются в соответствии с правилами игры, но ни одно правило никогда не предполагает, какой именно ход следует сделать в данной ситуации… Такие типичные ходы всегда являются частью доказательства и выявляют интенциональные компоненты доказательства: они не имеют независимого логического обоснования, кроме как служат цели построения мостов между первоначально заданными данными или между некоторыми промежуточными шагами и последующими частями аргумента. Но эти мосты носят концептуальный, а не дедуктивный характер в смысле логики» [Rav, 1999, p. 26].

Какие еще различия между доказательством и логическим выводом можно считать важными, подразумевая когнитивное превосходство именно доказательства? Во-первых, в практике математического дискурса логические правила попросту не используются, если иметь в виду под этими правилами то, что является частью подходящих логических исчислений, например логики первого порядка. Обыденный математический дискурс погружен в среду естественного языка, точнее, его весьма ограниченной, но достаточно выразительной части. Конечно, математики избегают противоречий скорее интуитивным образом, не прибегая к спецификации логических средств. Доказательство в математике в этом смысле излагается как последовательность утверждений, где переход от одного утверждения к другому основан на выводе следствий на основе семантики, используемой в определениях и аксиомах, в которых значения терминов имеют интуитивный смысл. Цепь умозаключений в ходе доказательства не является зачастую полностью постижимой его читателями, и заполнение лакун не является четко очерченным процессом в том смысле, что нет никакой гарантии, что оно разрешает затруднительные, или непонятные, или же попросту непостижимые моменты.

Концептуальное доказательство как указание логической структуры

Именно в ходе заполнения лакун находит свое место формальный вывод. Для полного понимания доказательства оно сводится к серии шагов, переход между которыми может быть детализирован до степени применения относительно простых правил вывода формальной системы. Дж. Аззуни полагает, что доверие к математическим утверждениям в этой ситуации основывается на использовании чисто формальных систем (он их называет алгоритмическими системами), в которых это математическое утверждение имеет формальный аналог: «Я рассматриваю доказательство как *указывающее* на лежащий в его основе логический вывод (derivation). *Как* доказательство делает это, является сложным вопросом. Но сразу можно сказать следующее: Поскольку (a) логический вывод (в принципе) механически проверяем и (b) алгоритмические системы, которые кодифицируют, какое из правил может быть применено в выводе в данной системе, является (неявно, или же в наши дни явно) распознается математиками, отсюда следует, что если доказательства действительно являются средством математиков для убеждения друг друга или другого механически проверяемого вывода, этого будет достаточно для объяснения того, почему математики столь склонны к согласию друг с другом в отношении того, является ли некоторое доказательство убедительным в установлении теоремы» [Azzouni, 2004, p. 84].

Точка зрения Аззуни конечно же является версией формализма. С его точки зрения, значимость доказательства обеспечивается «указываемым» логическим выводом (на самом деле не реализуемым на практике) в рамках некоторой алгоритмической системы. Правда, эта система понимается достаточно широко. Действительно, «я уже отмечал, что "алгоритмические системы" не ограничены ни конкретной логикой… ни точным языком (в противоположность диаграммам или картинкам). Все, что требуется, это чтобы "доказательство", как бы оно ни понималось, должно быть (в принципе) механически распознаваемым» (Ibid., p. 86).

Аксиоматический метод и формализм

Таким образом, точка зрения, согласно которой все важные математические доказательства схвачены формальной логикой, так что математическое мышление не выходит за рамки некоторого набора правил, противостоит точке зрения, что математическая манера мышления основана на значении и неформальном понятии истинности, которые не могут быть схвачены формальной дедукцией в логических исчислениях. Фиксацию этого противостояния можно обнаружить в ряде смежных проблем философии математики. В частности, речь идет об аксиоматическом методе, «идеология» которого проявилась в наибольшей степени в формалистическом взгляде на математику, особенно в период от «Основания геометрии» Д. Гильберта [Гильберт, 1948] до «Начал математики» Н. Бурбаки [Бурбаки, 1963]. Некоторое ослабление акцента на важность аксиоматического метода, которое совпало с ослаблением влияния метода в 1960-х, может объяснять двумя факторами: с одной стороны, это утвердившееся понимание того, что теоремы Геделя о неполноте арифметики окончательно подорвали программу Гильберта, и, во-вторых, общая усталость от формализма в основаниях математики. Впрочем, эти два фактора столь тесно связаны между собой, что их разделение в некоторой степени сводится лишь к некоторым незначительным акцентам.

Но хотя программа Гильберта и считается нереализуемой в полной степени, сам по себе формализм как философия математики, а также как идеология работающих математиков имеет значительное влияние. Частично это влияние объясняется как раз пониманием доказательства как выведения следствий в логическом языке. Вообще, соотношение формальных и содержательных аспектов математического дискурса является столь широкой темой, что даже сведение его к проблематике поисков статуса доказательства оставляет широкий простор для разнообразных взглядов на природу доказательства. Среди множества проблем такого рода особенно интересными представляются две. Во-первых, что, собственно, добавляет формальное доказательство к содержательному или концептуальному с точки зрения самой методологии проведения математических исследований. Другими словами, не сводится ли доказательство по сути своей к демонстрации логической правильности рассуждения, ведущей к четко определенной цели и служащей именно этой цели. Во-вторых, не является ли формализация поводом для большей убедительности доказательства, коль скоро доказательство понимается как способ убеждения в правильности некоторой гипотезы.

Позиция, которую занимает И. Рав, сводит роль логического вывода доказательства до формулировки правил игры, что вполне согласуется с формализмом. Однако, даже принимая в целом доктрину формализма, и эта роль может быть подвергнута сомнению. Так, Г. Крайзель говорит следующее: «Конечно, если человек оперирует массами бессмысленных символов, как он говорит, то возможность формализации или механизации является довольно очевидной предпосылкой для точности. Но было бы странно, так сказать нелогично, делать из этого вывод, что надежность аргумента повышается, если игнорировать все, что мы знаем о предмете, и рассматривать его как манипуляцию бессмысленными символами! Фактически, практически абсолютно необходимый метод перекрестных проверок, сравнение шагов в аргументе с фоновыми знаниями или переосмысление формул (в терминах Гильберта: с помощью "нечистых" методов) дает новый смысл аргументу» [Kreisel, 1985, p. 145].

Конечно, следует иметь в виду, что содержательные или концептуальные доказательства, или просто доказательства, могут иметь разные степени детализации, и в некоторых случаях они могут довольно близко приближаться к доказательствам формальным. Но в целом структура концептуального доказательства существенно отличается от логического вывода, потому что в первых важнейшую роль играют семантические значения, лежащие в основе понимания доказательств. Само по себе формальное доказательство как средство убеждения вообще не работает без предварительных пояснений, комментариев и прочих вещей, обеспечивающих постижение смысла математического дискурса.

Концепции *vs*. пруверы

Концептуальная связность неформального доказательства является важнейшим фактором в доверии этому доказательству. Другими словами, доказательство должно быть непротиворечивым. Последний термин звучит уже скорее в метаматематическом духе, потому что именно непротиворечивость является главным предметом метаматематики. На каком этапе метаматематика с ее аппаратом теории доказательства вторгается в концептуальные доказательства или, лучше, в какой степени концептуальные доказательства нуждаются в средствах метаматематики. Эти последние средства тоже могут варьироваться, и крайним случаем являются компьютерные доказательства. Действительно, сложность концептуальных доказательств может превышать порог интеллигибельности, то ли в силу необозримости доказательства, то ли в силу сложности концептуальных построений. Их проверка может оказаться крайне трудоемкой и, стало быть, затруднительной и по концептуальным причинам, и по причинам социологическим. Таким образом, «вспоможение» с помощью предельно формализованных средств вроде компьютерной программы оказывается неизбежным. Конструирование «пруверов», или сходных проверочных программ, служит этой чисто прагматичной цели. Я. Хакинг цитирует математика М. Харриса: «Воеводский предсказал, что в скором времени можно будет разработать процедуры проверки доказательств пруверы (proof-checkers) на основе унивалентных оснований [область, которую разрабатывал Воеводский], которые могли бы проверить правильность доказательств, записанных на подходящем читаемом машиной языке. Через несколько лет, добавил он, журналы будут принимать только статьи, сопровождаемые их машинно-проверяемыми эквивалентами» [Хакинг, 2020, с. 44].

Сам Хакинг добавляет при этом, что спекуляции Воеводского – это крайняя версия лейбницевского доказательства, доказательства как конечной последовательности предложений, каждое из которых есть либо аксиома или выводится из предыдущих членов последовательности однократным применением правил вывода. Даже не прибегая к крайностям, можно сказать, что функция логических доказательств состоит в том, чтобы гарантировать и сохранить непротиворечивость сложной системы концептуальных взаимодействий всей системы заключений математического дискурса. Принятое многими в качестве стандартного представление заключается в том, что неформальная и логическая стороны доказательства являются парой дополняющих друг друга методов в подтверждение надежности математического знания. С одной стороны, нежелательны противоречивые конструкции, с другой – невозможно чистое манипулирование знаками без семантического содержания. Это чисто прагматическая позиция встречается временами с вызовами, суть которых состоит в превалировании одного метода над другим. Характерным примером такого случая является известная работа И. Лакатоса [Лакатос, 1967], в которой логические соображения уступают место семантическим модификациям понятий и новым определениям. Другая крайность Воеводского указана выше.

Хотя любое концептуальное доказательство, по Аззуни, «показывает» (indicate) логический вывод, который должен быть подвержен механической проверке, ситуация с этой проверкой тоньше, чем это представляется формалистам. Действительно, важным является вопрос о том, в какой степени формальное доказательство усиливает концептуальное доказательство. При обсуждении этой проблемы противостоят опять-таки две группы: первая ассоциируется с формализмом гильбертского толка, а вторая – с предпочтением концептуального доказательства. Формалисты полагают, что логическое доказательство является одной из причин того, чтобы верить в доказываемую теорему. Их противники отдают предпочтение пониманию доказательства как анализа значения математических понятий, отводя логической стороне дела второстепенное значение. Другими словами, «строгое» логическое доказательство никоим образом не увеличивает доверия к доказываемому результату. Рав настаивает на том, что «в противоположность различным формалистическим взглядам… математические доказательства цементируются с помощью аргументов, основанных на значении математических терминов, которые встречаются в них и которые по самой своей концептуальной природе не могут быть охвачены формальными исчислениями» [Rav, 2007, p. 294].

Границы сложности формальных доказательств: выход в эпистемологию

Однако А. Пелк считает подобную защиту антиформалистской позиции слишком умеренной и даже мягкой, выдвигая гораздо более жесткую версию, которая уже имеет дело с тем, какая из трактовок математического доказательства дает большее доверие к доказываемым теоремам. Он утверждает, что «никакая связь между логическим выводом доказательства и неформальным доказательством не усиливает доверия к теоремам на нынешнем этапе знания» [Pelc, 2009, p. 87].

Аргументация Пелка выводит дискуссию из узкой математической трактовки доказательства на эпистемологические просторы, утверждая, что невозможно иметь доверие к теоремам, если исходить из формального представления их доказательств. Это действительно более широкая постановка вопроса. Потому что речь идет не просто о неадекватности формализмов для понимания математического дискурса как о некоторого рода контингентном обстоятельстве, а о теоретической невозможности в получении доверия к математическим результатам на основании формального их представления. Правда, при этом есть одна очень важная оговорка: речь идет об «интересных» математических теоремах, очевидно противопоставляемых тривиальным. Дело в том, что в случае «тривиальных» результатов в виде простых следствий из определений логическое доказательство попросту совпадает с концептуальным (например, как это имеет место в теории групп). И хотя понятие интересного математического результата расплывчато, Пелк, как и многие другие, предпочитает в качестве примера Последнюю Теорему Ферма. Однако здесь можно усомниться, насколько доказательство этой теоремы может быть уместным для такой дискуссии. Дж. Хорган в симптоматично названной статье «Смерть доказательства» называет доказательство Уайлса «восхитительным анахронизмом», добавляя, что «доказательство Уайлса имеет по существу ту же классическую дедуктивную форму, что и геометрические теоремы Евклида. Оно не требует никаких вычислений… Уайлс также не использовал компьютеры для графического представления идей, выполнения вычислений или даже для составления своей статьи; секретарь печатал его рукописные заметки» [Horgan, 1993, p. 94].

Контекст обсуждения Хорганом связан с современным повсеместным использованием компьютеров в доказательстве, что играет на руку сторонникам концепции доказательства как вычисления. Но неполная нерелевантность примера с теоремой Ферма не устраняет необходимость более широкого рассмотрения вопроса о приемлемости формализма.

Более широкий характер обсуждения соотношения логических формальных и концептуальных сторон доказательства обусловлен, как уже упоминалось, обращением к проблеме возможности механической проверки логического доказательства. Эта проблема является одной из самых обсуждаемых в философии математики. Коль скоро логический вывод схватывает в некотором смысле структуру концептуального доказательства, он должен быть теоретически доступным механической проверке. Но именно здесь лежит решительное расхождение радикальных позиций Аззуни и Пелка. Традиционно считается, что формализм в математике отождествляется с уверенностью в том, что математическое утверждение обретает значимость в силу того, что манипуляции со знаками являются механической операцией. Но это представление является значительным упрощением. Хотя любое концептуальное доказательство, по Аззуни, «показывает» (indicate) логический вывод (что объясняет само название концепции Аззуни), который должен быть подвержен механической проверке, ситуация с этой проверкой, как утверждает Пелк, тоньше, чем это представляется формалистам: «Формалистам не нужно в действительности *представлять* “показываемый” логический вывод, но они должны обосновать, что такой вывод может быть теоретически зафиксирован и проверен механически. Эта теоретическая возможность является *необходимым* условием в получении доверия, и она должна быть обоснована. Но есть важная асимметрия в отношении “бремени обоснования”. Для того чтобы оспорить такое формалистское утверждение, нет нужды показывать, что такой механически проверяемый логический вывод теоретически невозможен; достаточно показать, что формалисты не обосновали теоретической возможности механической проверки такого вывода» [Pelk, 2009, p. 89].

В качестве примера приводится невозможность, практическая и теоретическая, представления формального выведения Последней Теоремы Ферма. Это выведение является серией шагов, оценка числа которых лежит в основе аргумента Пелка, который идет в три этапа. Прежде всего, он не использует предположение, упомянутое выше, что формальный аргумент включает бесконечное число шагов. Но даже конечное число шагов может быть очень большим, и это обстоятельство имеет далекоидущие следствия в опровержении формализма.

Первый шаг аргумента состоит в предположении о существовании верхней границы числа шагов формального доказательства, соответствующего обычному доказательству интересных теорем, а также в доводах, что ее оценка будет крайне затруднительной. Второй шаг состоит в спекуляциях по поводу того, что эта верхняя граница будет чрезвычайно большим числом, достижимость которого является крайне сомнительной. Третий шаг состоит в том, что в ситуации с чрезвычайно большими числами сам вопрос о том, достижимо ли формальное представление, скажем, Последней Теоремы Ферма, не имеет определенного ответа, по крайней мере на нынешнем уровне знания. Таким образом, коренная посылка о механической проверяемости формального доказательства оказывается сомнительной по двум причинам. Во-первых, это технический аспект проблемы: практическая невозможность реализации в получении логического вывода столь большого размера. Во-вторых, это философский аспект: эпистемическая невозможность постижения столь больших объемов информации. Именно последнее обстоятельство говорит о том, что вряд ли формальное доказательство придает дополнительную уверенность в истинности теорем, и уж тем более концептуальное доказательство никак не «указывает» на формальный его вывод.

Конечно же, не следует считать, что в этой полемике поставлена последняя точка. Спор механицистов и менталистов по поводу природы человеческого мышления, и в первую очередь математического мышления в свете Второй Теоремы Геделя, является одним из наиболее интересных и важных в философии математики [Целищев, 2005]. Действительно, невычислимость, или практическая недостижимость верхней границы числа шагов в формальном доказательстве, о которой говорит Пелк, может ассоциироваться с убеждением Р. Пенроуза, разделявшимся, как оказалось, и Геделем, о превосходстве человеческого ума над машиной [Пенроуз, 2003]. Но это выводит проблематику природы математического доказательства в область философских спекуляций, которые редко имеют окончательный характер.

Список литературы

Бурбаки, 1963 – *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Очерки по истории математики. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. С. 245–259.

Гильберт, 1948 – *Гильберт Д.* Основания геометрии М.: ОГИЗ, 1948. 492 с.

Лакатос, 1967 – *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. М.: Наука, 1967. 152 с.

Хакинг, 2020 – *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики. М.: Канон+, 2020. 399 с.

Пенроуз, 2003 – *Пенроуз Р.* Тени разума. Т. 1. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 367 с.

Целищев, 2005 – *Целищев В.В.* Алгоритмизация мышления: геделевский аргумент. Новосибирск: Параллель, 2005. 303 с.

References

Azzouni, J. "The Derivation-Indicator View of Mathematical Practice", *Philosophia Mathemaica*, 2004, vol. 12, no. 3, 2004, pp. 81–105.

Bourbaki, N. "Arkhitektura matematiki" [Architecture of Mathematics], in: *Ocherki po istorii matematiki* [History of Mathematics: An Outline]. Moscow: Izdatelstvo inostrannoi literatury, 1963, pp. 245–259 (In Russian)

Hacking, I. *Pochemu voobshche sucshchestvuet filosofija matematiki* [Why Is There Philosophy of Mathematics at all]. Moscow: Kanon+, 2020, 399 pp. (In Russian)

Hilbert, D. *Ocnovaniya geometrii* [Foundation of Geometry]. Moscow: OGIZ, 1948, 492 pp. (In Russian)

Horgan, J. "The Death of Proof", *Scientific American*, 1993, vol. 269, no. 4, pp. 92–103.

Kreisel, G. "Mathematical Logic: Tool and Object Lesson for Science", *Synthese*, 1985, vol. 62, pp. 139–151.

Kripke, S. "The Church-Turing'Thesis' as a Special Corollary of Gödel's Completeness Theorem", in: B.J. Copeland, C. Posy & O. Shagrir (eds.). *Computability: Turing, Gödel, Church, and Beyond*. Chicago: MIT Press, 2013, pp. 77–104.

Lakatos, I. *Dokazatelstva i oproverzheniya* [Proofs and Refutations]. Moscow: Nauka, 1967, 152 pp.

Pelc, A. "Why Do We Believe Theorems", *Philosophia Mathematica*, 2009, vol. 17, no. 1, pp. 84–94.

Penrose, R. *Teni razuma* [Shadows of the Mind]. Moscow: Instititut komputernykh isslidovanii, 2003, 367 pp. (In Russian)

Rav, Y. "A Critique of a Formalist-Mechanist Version of the Justification of Arguments in Mathematicians' Proof Practices", *Philosophia Mathematica*, 2007, vol. 15, pp. 291–320.

Rav, Y. "Why Do We Prove Theorems?", *Philosophia Mathematica*, 1999, vol. 7, no. 3, pp. 5–41.

Tselishchev, V.V. *Algoritmizatsiya myshleniya: gedelevskii argument* [Algoritmization of Reasoning: Goedelian Argument]. Novosibirsk: Parallel, 2005, 303 pp. (In Russian)