МЕТАФИЗИКА ИНВАРИАНТНОСТИ

С.А. Векшенов

Российская Академия Образования

Инвариантность – магическое слово современной физики. Лоренц-инвариантность, калибровочная инвариантность, масштабная инвариантность – все это «входные билеты» в высокое общество современных физических теорий. Причину этого особого положения «инвариантности» можно усмотреть в следующем.

Наше познание мира всегда опосредовано языком. Можно придать этой опосредованности фундаментальный характер и, вместе с Л. Витгенштейном, считать, что «границы моего мира определяются границами языка» (Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt). Однако можно, следуя за Э. Гуссерлем, попытаться осуществить «взятие скобок» (epoche) и сделать прорыв от языка к самому объекту. Идея инварианта – это математическое воплощение идеи гуссерлианского «epoche».

Особенность этого воплощения состоит в следующем.

Как известно, со времен Галилея естествознание говорит языком математики. Однако внутренняя логика этого языка не прокладывает «царского пути» к инвариантным конструкциям. Источник идеи инвариантности – мир объектов существующих вне языка, но в языке определяемых. Более того, в идеале каждый «инвариантно определенный» математический объект должен соотноситься с объектом rerum natura (природы вещей). Известно, что это соотношение, возведенное в принцип, в явной форме было сформулировано П. Дираком и сыграло выдающуюся роль в физике XX в.

Поскольку мы стоим на пороге физики XXI в., попытаемся осмыслить этот принцип и понять, какой математический объект мы считаем «инвариантно определенным». Возможно, это позволит прийти к новым инвариантным структурам, созвучным тенденциям новой физики.

Начнем с простейшей ситуации.

Возьмем равносторонний треугольник. Наше интеллектуальное зрение позволяет видеть его как целостный объект, обладающий известными свойствами. Чтобы иметь возможность как-то использовать этот треугольник, его надо определенным образом обозначить, в данном случае – обозначить его вершины. Обозначим их цифрами 1, 2, 3, например, так, как показано на рис. 1.

Введенное обозначение является нашим произволом, который мы, разумеется, хотим нивелировать. Это значит, что наряду с данным выше обозначением мы должны рассмотреть все возможные обозначения в рамках выбранного алфавита [1–3] (рис. 2).

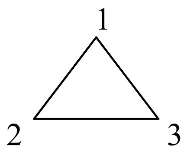

Рис. 1

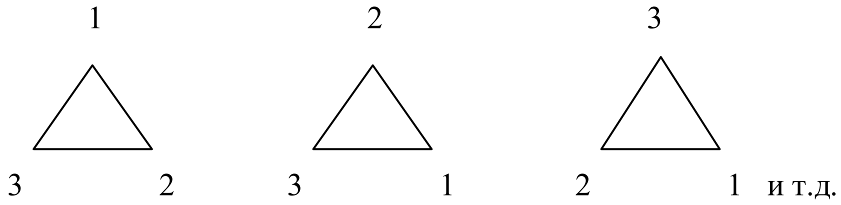

Рис. 2

Таким образом, вместе с треугольником необходимо рассмотреть все его 3! = 6 возможных обозначений:

1, 2, 3
1, 3, 2
……
3, 2, 1

Подобная игра с обозначениями может показаться схоластикой, поскольку наша интуиция хорошо выделяет равносторонний треугольник среди других объектов, как идеальных, так и материальных. Однако проблема состоит в том, что большинство интересующих нас объектов не даются нам интуицией. Составлять представление о них мы можем на основе некоторого числа описаний. Можем ли мы составить представление о Руанском соборе на основе серии картин Клода Моне? Вероятно, можем, хотя каждое полотно отражает видимый художником образ этого собора (рис. 3).

Рис. 3

Вернемся к названным выше обозначениям. У нас имеется таблица чисел, каждую строку которой мы понимаем как обозначения некоторого объекта. Задача состоит в том, чтобы, опираясь на эти обозначения, найти стоящий за ними объект. Очевидно, что задача будет решена, если указанную таблицу чисел превратить в структуру, которая однозначно бы указала на равносторонний треугольник.

С первого взгляда неясно, каким именно образом можно абстрагироваться от вводимых обозначений. Принципиальная идея состоит в том, чтобы рассматривать не сами обозначения, а *преобразования одних обозначений в другие.* Можно предположить, что эта идея навеяна физикой. Действительно, каждую тройку обозначений можно воспринимать как «координаты» некоторого объекта, находящегося в пространстве соответственно, подстановка: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{matrix}$ станет *преобразованием* «координат», приводящим к новому обозначению *того же* объекта. Далее, само преобразование координат указывает на более фундаментальную вещь – преобразование пространства (плоскости), при котором объект остается неизменным («неподвижным»). Этим свойством, как известно, обладают преобразования симметрии.

Для завершения картины необходимо фиксировать набор таких преобразований. Он возникает из следующих очевидных соображений: последовательная смена обозначений, очевидно, тоже является обозначением. Кроме того, очевидно, что мы всегда можем вернуться от нового к старому обозначению. Отсюда следует, что композиция преобразований и обратное преобразование также являются элементами искомой структуры. Чтобы «замкнуть» структуру, необходимо добавить единичное преобразование (мы ничего не переобозначаем). Таким путем мы приходим к понятию группы, в данном случае группы S_3 перестановок трех элементов. Переход от обозначений к преобразованиям позволяет определить группу более привычным образом: как совокупность преобразований, оставляющих неподвижным некоторый объект, в данном случае равносторонний треугольник. Делая традиционный для современной математики «обратный ход», равносторонний треугольник можно определить как *инвариант* группы, S_3, то есть как объект, который не меняется при действии на него преобразований – элементов группы (и, следовательно, останется неизменным при обозначениях, взятых из данной таблицы).

Мы привели эти детальные рассуждения, чтобы прояснить несколько важных моментов, которые остаются без внимания при традиционном изложении.

1. Переход от «обозначений» к «преобразованиям» является крайне нетривиальным ходом, который формировался примерно в течение достаточно длительного времени. Создатель теории групп Э. Галуа (1811–1821) говорил на языке перестановок корней алгебраического уравнения, что ближе к обозначениям, чем к преобразованиям. Введенное им фундаментальное понятие

нормальной подгруппы опирается именно на идею независимости от обозначений. Например, подгруппа группы S_3 называется нормальной (нормальным делителем), если она инвариантна относительно переобозначения вершин треугольника (в случае Галуа переобозначения – это перестановки корней уравнения). Такой подгруппой в данном случае является подгруппа циклических переобозначений (перестановок).

В соответствии с метафизикой инвариантности можно предположить, что если группа G указывает на некоторой объект A, то именно нормальная подгруппа H, в силу ее инвариантности относительно переобозначений (независимости от «систем координат»), указывает на подобъект объекта A. Собственно говоря, вся теория Галуа является реализацией этой метафизики применительно к задаче разрешимости алгебраических уравнений.

В современном изложении нормальная подгруппа понимается как подгруппа инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы. Определение приобрело общность, но утратило интуитивную ясность.

2. Интерпретация переобозначений как преобразования прочно закрепилась в математике, по-видимому, со времен Эрлангенской программы Ф. Клейна, в которой группа преобразований пространства определяла его геометрию. Именно эта идея была применена Пуанкаре, а позднее и Минковским для релятивистского синтеза пространства и времени.

3. Понятие группы традиционно считается чисто алгебраическим и своего рода эталоном чистой абстракции. Однако, как было продемонстрировано выше, в групповых операциях можно увидеть следы пространственных отношений. В этом нет ничего неожиданного поскольку, например, арифметическая операция сложения начиналась с операции сложения отрезков прямой. Связь же инвариантности и преобразований является следствием пространственной сущности теоретико-групповых операций.

Попробуем теперь перенести метафизику инвариантности в иную ситуация и рассмотрим натуральный ряд.

Мысль Кронекера о том, что натуральные числа есть создание Господа Бога (Die ganze Zahlen hat der Hebe Gott macht, alles anderes ist Menschenwerk), заведомо выводит их из рамок всякой метафизики и обеспечивает им Высшую инвариантность. В добавление к этому можно вспомнить слово «ergründen» – «дойти до сути», которое одновременно означает «измерить», то есть «дойти до числа».

С другой стороны, наш разум (Vernunft) также желает дойти до сути (в своем понимании «ergründen»). Давним примером этому может служить книга В. Клиффорда «The common sense of the exact science» («Здравый смысл точных наук») (1886), где кроме прозрений об искривлениях пространства под действием гравитации и «клиффордовых алгебрах» содержался ряд глубоких замечаний, касающихся инвариантности числа (заметим, что словосочетание «common science» сейчас было бы более точно перевести как «метафизический», а не как «здравый» смысл).

В трех первых параграфах главы «Number»: «Number *is independent* of the order of counting», «A sum *is independent* of the order of Adding», «Product *is independent* of the order of maltipying» в явном виде проводится мысль, что из двух хорошо известных аспектов числа: порядкового и количественного – необходимо придерживаться его количественной трактовки именно в силу инвариантности понятия «количества». Учитывая традиционную связь «количества» с пространством, а «порядка» со временем, можно сказать, что и в этом случае, как и с понятием группы, предпочтение было отдано «количеству» (пространству).

Количественная трактовка числа приобрела фундаментальный характер в рамках теории множеств Кантора. Напротив, порядковый аспект стал восприниматься как нечто случайное, полностью зависящее от произвола исследователя [3]. Тем не менее Кантор дал свою «количественную» трактовку порядка, которая, как ему представлялась, была свободна от этого произвола (то есть была инвариантной). Суть его подхода состояла в следующем.

Числа $1, 2, 3\ldots n$ появляются в определенном порядке. Если предполагать, что за этим порядком стоит некая сущность, а именно *время*, и в порядковом числе мы должны отразить именно эту сущность, то какой-либо фиксированный порядок появления упомянутых элементов не является существенным. Это значит, что необходимо рассмотреть все возможные порядки элементов $1, 2, 3\ldots n$, то есть:

$$\begin{gathered} 1, 2, 3 \ldots n; \\ 2, 1, 3 \ldots n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n,\ n-1 \ldots 1 \end{gathered}$$

Теория множеств извлекает из этого набора порядковое число следующим образом. Будем смотреть на эти порядки как на «упорядоченные множества». Ординальное число, которое является теоретико-множественной моделью порядкового числа, определяется как множество «безликих» элементов, которые, тем не менее, связаны общей «идеей порядка», присущего всем названным упорядоченным множествам, а именно порядка, который связывает числа $1, 2, 3 \ldots n$.

Подобная трактовка порядкового числа, хотя и является в настоящее время общепризнанной, тем не менее, не решает исходной задачи выявления стоящей за ним сущности – *времени*, поскольку теоретико-множественные конструкции воплощают в себе идею пространства. Таким образом, инвариантность порядковых чисел снова оказывается «пространственной».

Попробуем, пользуясь предыдущей таблицей, инвариантно выразить идею времени (порядка), не прибегая к теоретико-множественным конструкциям.

Если следовать интуиции времени (а именно этой интуиции мы придерживаемся), то приведенную выше таблицу можно рассматривать как «след» некоторого абстрактного процесса (по сути, «след» самого времени):

$$
\begin{array}{l}
1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ n; \\
2 \to 1 \to 3 \to \ldots\ n; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
n \to n-1 \to n-2 \ldots\ 1
\end{array}
$$

При таком понимании числа *1, 2, 3 … n* снова становятся безликими, но уже в другом смысле – как некоторые индикаторы, «бумажки», которые брошены во временной поток. Очевидно, что все эти числа-индикаторы движутся одновременно, поскольку время едино. Таким образом, все приведенные выше упорядочивания не являются альтернативами каноническому порядку $1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ n$, а являются частью единого процесса или, более точно, – способом обнаружения этого процесса. Мыслить все возможные упорядоченности раздельными – дань пространственной интуиции. Иными словами, считать что все эти возможности реализуются как отдельные независимые процессы – значит приравнять интуицию времени к интуиции пространства (что, собственно говоря, постоянно и происходит в теоретико-множественной математике).

Все вышесказанное говорит о том, что в вышеназванной таблице представлен «след» *одного* процесса.

Чтобы понять структуру этого процесса, необходимо ввести принципиально новый тип актуальной (завершенной) бесконечности – порядковую бесконечность. Несколькими словами описать эту бесконечность можно так.

Если есть процесс γ, то существует, по крайней мере, два способа превратить его в объект, в «идею» процесса. Во-первых, собрать его шаги в одно целое. Это теоретико-множественное, количественное решение. Второй способ состоит в том, чтобы замкнуть процесс на себя. Результат такого замыкания можно также рассматривать как новую «идею» процесса (в платоновском смысле). Если сам процесс неограничен, то эти «идеи» – объекты можно рассматривать как различные типы бесконечностей. В результате такого замыкания получаются некоторые новые, не теоретико-множественные структуры, которые естественно назвать *фундаментальным вращением* (формальная конструкция, приводящая к фундаментальному вращению, приведена в [4, с. 91–114]).

Рассматривая внимательно «след времени», представленный в рассматриваемой таблице, можно увидеть в нем «следы» фундаментальных вращений. Действительно, фрагмент

$$
\begin{array}{l}
1 \to 2 \to 3 \\
2 \to 1 \to 3
\end{array}
$$

естественно отождествить с фундаментальным вращением ↺. Фрагмент:

$$1 \to 2 \to 3$$
$$3 \to 2 \to 1$$

также можно отождествить с фундаментальным вращением ↺.

Поскольку названные фрагменты различаются нашей интуицией (в первом случае метка *3* остается на месте), такое же различие можно применить и к соответствующим фундаментальным вращениям. В результате эти фрагменты вместе дают фундаментальное вращение ↺↻.

Попробуем подсчитать число фундаментальных вращений, которые можно извлечь из таблицы:

$$1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ n;$$
$$2 \to 1 \to 3 \to \ldots\ n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n \to n{-}1 \to n{-}2 \ldots 1,$$

стараясь в максимальной степени избежать произвола в определении их количества и направлений вращения.

Основная идея состоит в том, что фундаментальные вращения, которые можно извлечь из этой таблицы, сгруппировать в пары, число таких пар будет зависеть только от *n*.

Простой подсчет показывает, чтобы из таблицы, содержащей $n!$ перестановок, можно извлечь ровно $\lambda(n)$ пар фундаментальных вращений, где $\lambda(n)$ определяется следующим образом:

$$\lambda(n+1) = \lambda(n)(n+1)+1;$$
$$\lambda(0)=0;$$
$$\lambda(1)=0.$$

В целом же из данной таблицы можно извлечь:

– n линейных шагов, если абстрагироваться от конкретных перестановок n чисел-меток;

– $\lambda(n)$ пар фундаментальных вращений.

Наглядно эту структуру можно представить следующим образом (рис. 4):

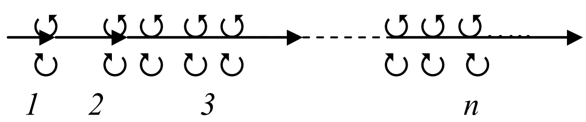

Рис. 4

Если эту структуру «вытянуть в линию», то получится следующее:

(↑↑↑……↑)$_n$(↺↻↺↻ ……↺↻)$_{2\lambda(n)}$.

Такое представление вполне естественно, поскольку с ростом n фундаментальные вращения появляются парами, хотя, разумеется, имеет место неизбежное в математике допущение.

Главный смысл полученной структуры состоит в следующем.

Реализация идеи инвариантности в отношении порядковой составляющей числа дает крайне неожиданный результат: *каждый «линейный» шаг процесса порождения натурального числа n сопровождается появлением некоторого количества пар взаимно противоположных фундаментальных вращений, при этом количество этих пар растет с ростом n.*

Несколькими штрихами обозначим следствия данного утверждения.

Наиболее существенные следствия связаны с моделями континуума. Как известно, общепринятой моделью континуума является теоретико-множественная точечная модель. При этом каждая точка согласно постулату Кантора отождествляется с действительным числом (или системой чисел). В свою очередь аксиомы действительных чисел допускают различные интерпретации. В частности, Д.Х. Конвеем (John Horton Conway) была предложена модель, в которой действительные числа отождествляются с последовательностями, построенными из двух знаков «↑» и «↓». Например, число 1/3 в этой модели записывается как ↑↓↓↓↑↑↓↓↑↑... Очевидно, что к каждой такой записи числа можно применить сформулированное выше утверждение, с той лишь разницей, что линейные шаги могут осуществляться в противоположных направлениях. Это приводит к относительному изменению направления вращений в появляющихся парах, что, однако, не влияет на всю структуру в целом. Например: ↑↓↓↓↑↑ ... ↺↻↻↺ ↻↺↻↺↺↻↺↻ … .

Данная конструкция допускает ряд интерпретаций. Наиболее интересны из них такие.

1. Последовательность ↑↓↓↓↑↑ … в арифметике Конвея интерпретируется как действительное число (и, в общем случае, даже как нестандартное действительное число) и, согласно постулату Кантора, – как точка континуума. Связанная с ней последовательность фундаментальных вращений ↺↻↻↺↻↺↻↺↺↻↺↻ … может быть интерпретирована как действительное число – фаза φ кинематического образа $e^{i\varphi}$ фундаментального вращения. Таким образом, можно считать, что к каждой точке континуума «привязано» некоторое абстрактное вращение «$e^{i\varphi}$», причем фаза этого вращения связана с числовыми характеристиками точки. Эта привязка показывает, что каждая точка континуума приобретает внутреннюю динамику, обусловленную только ее статусом как элемента континуума.

2. Более радикальная интерпретация заключается в том, чтобы посмотреть на структуры вида: ↑↓↓↓↑↑ ... ↺↻↻↺ ↻↺↻↺↺↻↺↻ … как на «токовые нити», из которых «соткан» континуум [4].

Приведенные структуры созвучны многим конструкциям из арсенала современных физических теорий: «струнам», «петлям» и пр. При этом в основе перечисленных конструкций лежат те или иные физические или геометрические образы, которые, так или иначе, апеллируют к традиционным теоретико-множественным структурам (например, струнные теории реализуются на фоне классического точечного континуума). Рассмотренные выше структуры позволяют расширить этот континуум исключительно «внутренними», алгебраическими средствами.

В заключение стоит отметить крайне интересную «гуманитарную» интерпретацию структуры, представленной на рис. 4.

Известный филолог, академик РАН В.Н. Топоров, занимаясь анализом космогонических мифов различных народов мира, заметил, что, несмотря на чрезвычайное разнообразие сюжетов и действующих лиц, космологический миф представляет становление мира как результат последовательного введения основных бинарных оппозиций: небо – земля и т. д. Например, подобная схема дана в начале кн. Бытия: «И сказал Бог: да будет свет... и отделил бог свет от тьмы. И назвал Бог свет днем, а тьму ночью... И сказал Бог: да будет твердь посреди воды... И создал Бог твердь, и отделил воду... И назвал Бог твердь небом…» и т. д.

Приведенная на рис. 4 структура хорошо вписывается в общую схему. Таким образом, натуральный ряд вместе с парными фундаментальными вращениями имеет общий со всеми мифологическими картинами мироздания архетип, что неожиданно возвращает нас к парадоксальной мысли Л. Кронекера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат. – М.: Гнозис, 1994.
2. *Гуссерль Э.* Кризис европейских наук и трансцендентальная феноменология: Введение в феноменологическую философию // Вопросы философии. – 1992. – № 7.
3. *Cantor G.* Mitteilungen zur Lehre vom Transfinitum / Пер. на рус. яз. Г. Кантор // К учению о трансфинитном: Труды по теории множеств. – М., 1985.
4. *Векшенов С.А.* Метафизика и математика двойственности // Метафизика век XXI / Под ред. Ю.С. Владимирова. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
5. *Топоров В.Н.* О мифопоэтическом пространстве: Избр. ст. – Pisa: ECIG, 1994.