МЕТАФИЗИЧЕСКИЙ ЯЗЫК МАТЕМАТИКИ

С.А. Векшенов

Российская Академия Образования

В статье рассматриваются метафизические возможности языка математики в контексте тенденций привнесенных «лингвистической философией». Основной акцент сделан на семантику этого языка, которая связана, прежде всего, с понятием бесконечного. Обсуждается трактовка этого понятия в оригинальных текстах создателя теории множеств Г. Кантора. На примере континуум – проблемы обосновывается целесообразность расширения семантики математического языка за пределы теории множеств.

Ключевые слова: язык, синтаксис, семантика, бесконечность, множество, континуум-проблема.

Человек постоянно стремится привести разнообразие мира под некий общий знаменатель. Это подталкивает его к осмыслению глубинной сущности вещей и введению абстрактных конструкций, выражающих эту сущность. Грандиозной реализацией этой схемы является осознание количественно-порядковой сущности предметов и отражение их в натуральных числах («Ты все расположил весом, числом и мерою» Прем. 11.21).

Именно абстрактные понятия стали основой великих концепций естествознания, начало которым было положено Г. Галилеем и И. Ньютоном. При этом «сущность» объекта в их понимании проявлялась, прежде всего, в причинно-следственных связях, что обусловило появление инструментов математического анализа. *Felis qui portuit rerum cognoscere causas* («счастлив тот, кто смог познать причины вещей» – Вергилий).

Приблизительно, с середины XIX в. подобное понимание «сущности» подверглось глубокому переосмыслению. Человек захотел искать единства не в глубине, а на поверхности (в естественных науках это проявилось как отождествление сущности и явления, «события»). Это практически однозначно определило инструмент такого единства – язык. Разумеется, никакой естественный язык не может взять на себя такую миссию. Даже английский язык, который в современном мире является универсальным средством коммуникаций, выполняет одновременно парадоксальную роль разделяющего начала даже в англоязычном мире: «*England and America are two countries separated by the same language*». Для такой объединяющей, метафизической, функции язык должен быть особым образом сконструирован.

Общее направление в создании такой конструкции можно охарактеризовать следующим образом.

Прежде всего, необходимо было упростить и унифицировать синтаксис языка, не сужая при этом, по возможности, его выразительных средств. Это достаточно просто сделать для выделенной предметной области и очень сложно для языка в целом. Наиболее существенные изменения на этом поле были связаны с алфавитной системой письма, когда из ограниченного числа знаков можно было получать языковые конструкции, пригодные для выражения самых тонких и трудноуловимых явлений.

Названные манипуляции с синтаксисом были бы совершенно бесполезны в плане создания «метафизического» языка, без осуществления аналогичных манипуляций с *семантикой*. Для этого необходимо выделить некоторое количество простейших сущностей и определить синтаксически верные конструкции, состоящие из комбинаций или трансформаций этих сущностей. В идеале достаточно одной сущности, из которой можно «дедуцировать» весь желаемый универсум вещей.

После окончания этой технической работы нужна *убедительная теория*, отождествляющая окружающий мир с сущностями, получаемыми в рамках созданного языка. В этом случае язык приобретает искомый метафизический статус.

Обрисованный ход мыслей осуществлялся на протяжении более чем ста лет значительными усилиями в разных областях знаний: Г. Фреге, Ф. де Соссюром, Г. Кантором, Б. Расселом, Л. Витгенштейном и др. Наиболее рафинированной областью, в которой названный ход мыслей был реализован, была математика. Поэтому для более ясного представления о «метафизической» жизни языка имеет смысл более пристально посмотреть на эту область, где за частностями хорошо просматриваются общие тенденции.

От бесконечности к множеству

Математика – это, прежде всего, развернутая теория бесконечного. В этом случае искомая универсальная сущность, составляющая семантику будущего метафизического языка, должна имманентно включать в себя идею бесконечности.

Проблема бесконечного впервые стала предметом логического анализа в школе элеатов. Их результаты известны сейчас в форме девяти дошедших до нас апорий Зенона Элейского. Они должны были показать, что человеческое мышление с необходимостью приходит к противоречию при попытке мыслить континуум как завершенную бесконечность[1]. При этом бесконечность понималась исключительно в негативном смысле. Это было естественным следствием развития логики доказательств – главного предмета школы элеатов.

Убедительность аргументов Зенона была столь велика, что у последующих философов и математиков возник своеобразный horror infiniti (страх

[1] Подробный анализ апорий Зенона приведен в книге П.П. Гайденко «Эволюция понятия науки» (М., 1980). Попытку рассмотреть апории в свете учения Г. Кантора предпринял А.С. Богомолов в книге «Актуальная бесконечность» (Зенон Элейский, И. Ньютон, Г. Кантор) (М.-Л. 1934). Обзор философии элеатов содержится, например, в книге С.Н. Трубецкого «Метафизика древней Греции» (СПб., 1895).

бесконечного). Позднее Аристотель укажет в «Физике»: «Доверять мышлению в вопросе бесконечного нелепо, так как противоречие имеется не в предмете, а в мышлении» [4]. Тем не менее именно Аристотелю принадлежит очень тонкий анализ бесконечного.

По Аристотелю, о бытии можно говорить в двух смыслах: в возможном и в действительном. В соответствии с этим имеется два понятия бесконечности: бесконечность потенциальная и бесконечность актуальная. Аристотель подробно разбирает принципиальный для всего последующего понимания бесконечного вопрос о том, каким образом существует бесконечное: как сущность или как свойство, присущее некой природе. Вопрос о том, «может ли находиться бесконечное в предметах математических и в мыслимых и не имеющих величины», в «Физике» не разбирается, так как этот вопрос «относится скорее к общему исследованию проблемы»[2]. В «Физике» Аристотель рассматривает проблему бесконечного чувственного воспринимаемого тела и доказывает, что оно не может существовать.

Основной тезис Аристотеля: бесконечное существует потенциально, но не существует актуально; бесконечное не есть что-то действительное, а только возможное. При этом опять же акцент делается на логическое, в данном случае уже модальное определение бесконечного. О потенциально бесконечном он говорит: «...бесконечное может существовать так, как существует день или как состязание – в том смысле, что оно становится всегда иным». И дальше: «Вообще говоря, бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, а взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным. Так что бесконечное не следует брать как определенный предмет, например, как человека или дом, а в том смысле, как говорится о дне или состязании, бытие, которые не есть какая-либо сущность, а всегда находится в возникновении и уничтожении, и хотя оно конечно, но всегда разное и разное... Бесконечное существует в возможности, так как вне его всегда можно что-нибудь взять...» Выходит, что бесконечное противоположно тому, что о нем обычно говорят: не то, вне чего ничего нет, а то, вне чего всегда есть что-нибудь, то и есть бесконечное» [3, с. 122].

Деление бесконечного на потенциальное и актуальное оказалось самой существенной идеей, определившей лицо этой проблемы. Последующие двадцать с лишнем веков интеллектуальной работы в этом направлении практически прошли в круге одной этой идеи.

Греческая философия и математика предпочитала оставаться в рамках потенциальной бесконечности. Например, известная теорема о бесконечности множества простых чисел звучала у Евклида так: «Первых чисел больше всякого предложенного количества первых чисел» [4]. В системе ценностей греков завершенное в себе единое имело куда более высокое в ценностном отношении место, чем противоположное ему многое – потенциально-бесконечное. Если первое отождествлялось с совершенным Космосом

[2] Которого у Аристотеля нет.

(а в более поздних системах неоплатонизма и с Верховным началом), то второе было непременным атрибутом хаоса, материи[3].

Средневековое мировоззрение поменяло эту ориентацию на прямо противоположную. Возможной причиной этому могла быть просто ошибка средневекового комментатора, истолковавшего античную материю как универсальное мировое начало, то есть Бога. Тем самым Бог получил атрибут бесконечности. Попав в теологическую орбиту, бесконечность подверглась в средние века исключительно тщательному и глубокому осмыслению. Прежде всего, схоласты пересмотрели выводы Аристотеля. В XIV в. школа инфинитистов утверждала, что поскольку понятие актуальной бесконечности не содержит противоречия, infinitum in actu может быть осуществлено божественным всемогуществом. Герардо из Болоньи ставит следующий вопрос: «Может ли кто-нибудь, кроме Бога, быть бесконечным по величине?». Его рассуждения характерны для схоластов: «У меня есть сомнения в этом вопросе. Ибо с одной стороны, общепринято, что величина не может быть актуально бесконечной, а идти против общепринятого трудно, но с другой стороны, в допущении бесконечного тела или бесконечной величины, я не усматриваю ясно никакого противоречия. И я не решусь с уверенностью сказать, что Бог не мог сделать того, в чем человек не видит противоречия, ибо Бог в состоянии сделать все, в чем не содержится противоречия» (Цит. по [5]).

На протяжении XIII–XIV вв. идет неуклонная работа по расшатыванию главного предубеждения, лежащего в основе всей античной науки, а именно предубеждения против бесконечного как негативного начала. Для христианских теологов бесконечное – то же, что и для древних греков, то есть то, что не имеет предела. Но отношение к бесконечному у тех и других различно. Если греки видели в бесконечном разрушительный хаос, то для христианских средневековых философов бесконечное – одно из проявлений Бога, упорядочивающий и миросоздающий элемент. В этом смысле бесконечное выступало прежде всего как Абсолютное, то есть то, что не доступно ни увеличению, ни уменьшению, что не имеет частей и пр. И хотя такая бесконечность уже носила онтологический характер, она все еще оставалась понятием негативным, противоположным, но уже в смысле сущности всему конечному. Все то, что имеет предел, есть конечное, не имеет своего источника и заложенной в самой себе цели. Все это – творение Бога, но сам он находится за пределами космоса и поэтому с необходимостью бесконечен. Таков официальный взгляд Средневековья на бесконечность.

Однако существовали и другие точки зрения. Особенно интересны взгляды христианского теолога Роберта Гроссета (ок. 1175–1253) епископа Линкольнского и учителя Роджера Бэкона. По Гроссету актуально-бесконечное есть определенное число (*certus numerus*), которое, хотя и непознаваемо для нас, но, тем не менее, существует актуально. Причем актуаль-

[3] Греки считали бесконечное образом материи, в то время как образом Бога у них служила точка, то есть то, что не имеет частей.

но-бесконечные числа можно сравнивать между собой так, что одно из них может быть больше или меньше другого. Человек в силу несовершенства своего интеллекта не в состоянии постигнуть бесконечное *in actu*, но для Бога дано сразу, в одном акте, то, что человек осуществляет шагами. Потенциально бесконечному у Гроссета противостоит не единое, как у греков, но актуально сущее бесконечное множество единиц. Человеческому познанию доступно только потенциально бесконечное – низший тип бесконечного. Истинно бесконечным, с точки зрения Гроссета, является актуально бесконечное, постигаемое Богом.

Здесь мы видим пример того, что взгляд на схоластику как на бесплодное умствование совершенно не соответствует ее роли в становлении многих математических идей, теории бесконечного в частности. В своем историческом обзоре математики XIX в. Феликс Клейн пишет: «Глубоко несправедливым является общепринятый взгляд на схоластику как на теряющуюся в бесплодных мудрствованиях… ума. Именно наша эпоха должна была бы отказаться от такого поверхностного суждения, основанием к которому послужил чуждый нам мистический и метафизический фон, присущий всем творениям эпохи схоластов. Однако если снять со схоластических спекуляций это покрывало, из-за которого они кажутся поверхностному взору чисто теологическими мудрствованиями, то оказывается, что они в сущности являются безупречными подходами к проблемам, составляющим в настоящее время содержание того, что мы называем теорией множеств. Недаром Георг Кантор, творец теории множеств, учился у схоластов» [5/6].

В период Ренессанса были попытки ввести актуальную бесконечность в форме бесконечных (точнее бесконечно-малых) величин, однако они не увенчались успехом. Развитие же математики переменных величин привело к практически полному неприятию актуально бесконечного. Приведем здесь только мнение Карла Гаусса – короля математиков по интересующему нас вопросу. В мае 1831 г. Шумахер прислал Гауссу доказательство теоремы, в котором он допускал, что конечный сдвиг центра окружности бесконечного радиуса не влияет на величину центрального угла, измеряемого дугой окружности. Гаусс ответил: «Что касается Вашего доказательства, то я прежде всего протестую против употребления бесконечной величины как чего-то заданного, что в математике нигде недопустимо. Бесконечное является лишь *facon de parle* (способом выражения), между тем как речь идет собственно о пределах, к которым известные отношения приближаются произвольно близко, тогда как другим представляется возрастать без ограничения... конечный человек не отважится рассматривать бесконечное как нечто данное и доступное интуиции…» (цит. по [7]).

Пропуская многочисленные, но не принципиально отличающиеся от вышеизложенных точки зрения на бесконечное, перейдем сразу к кульминационному развитию теории.

Наивысшего накала проблема бесконечного достигла в середине XIX в. в связи с задачей обоснования математического анализа. Часть работы была сделана О.Л. Коши, К. Вейерштрассом и др., уточнившими понятие предела, однако понятие действительного числа – фундамент всего анализа – оставалось по-прежнему зыбким. Решение этой проблемы совершенно ясно показало, что оставаться только в рамках потенциальной бесконечности математика уже не может. Осознание этого факта есть бессмертная заслуга Г. Кантора, создавшего первую позитивную теорию бесконечности – теорию множеств.

Чтобы сделать бесконечное предметом математической теории, Кантор, а еще ранее Б. Больцано, постулировали, по сути, два положения:

- бесконечность это не объект, а предикат некоторого другого объекта. Имеет смысл говорить только о бесконечности чего-либо (бесконечно-длинное расстояние, бесконечно-удаленные точки и т.п.).
- объектом, относительно которого рассматривается предикат бесконечного, является понятие «количества».

Иными словами, все многообразие бесконечностей сводится к бесконечности количественной. Проиллюстрируем это фундаментальное положение соответствующими определениями.

«...Для нас является важным только то, сможем ли мы при посредстве определения одного только количества определить бесконечность вообще. Это было бы не так, если бы оказалось, что понятие бесконечного в настоящем значении этого слова может быть применено только к количествам, то есть бесконечность есть свойство одних только количеств, иначе говоря, что мы называем нечто бесконечным, поскольку мы в нем находим свойство, которое можно рассматривать как бесконечное количество. А это, по моему мнению, действительно справедливо. Математик, очевидно, никогда не употребляет этого слова в другом смысле, так как он вообще занимается почти исключительно определением величин, принимая одну из них того же рода за единицу и пользуясь понятием о числе» [8].

«Под актуально бесконечным… следует понимать такое количество, которое, с одной стороны, не изменчиво, но определено и неизменно во всех своих частях и представляет собой истинную постоянную величину, а с другой, в то же время превосходит по своей величине всякую конечную величину того же вида» [9].

Следует сразу сказать, что долгое время считалось, что теория Больцано есть первая и во многом неудачная попытка построения теории актуальной бесконечности, столь блестяще осуществленной затем Кантором. Это предопределило отношение к его теории и личности автора, скромного пражского философа, попавшего в гигантскую тень профессора из Галле. Лишь в последнее время проницательный взгляд П. Вопенки вновь обратил внимание на принципиальные особенности больцановской теории и сделал из них далеко идущие выводы. Мы обсудим их позже, а сейчас сосредоточим свое внимание на теории Кантора.

Первоначальная конструкция, приводящая к актуальной бесконечности, заключается в следующем.

Рассмотрим ряд натуральных чисел 1, 2, 3 ... *n*... . Он возникает путем присоединения единицы к уже имеющемуся числу. Назовем это первым принципом порождения. Тогда каждое число *n* можно полагать состоящим из *n* единиц. Количество чисел, получаемых этим способом, не ограничено. Предположим теперь, что весь процесс присоединения единицы закончен, то есть сделано бесконечное число шагов и образовано новое число $\boldsymbol{\omega}$. Это будет второй принцип порождения. В соответствии с первым принципом порождения получим числа: $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$, которых тоже существует неограниченное количество. К этим числам применим второй принцип порождения и образуем число 2ω. Если снова применить к числу 2ω первый принцип порождения, то мы приходим к продолжению: $2\omega+1, 2\omega+2, 2\omega+3 \ldots$ и т.д.

Таким образом, можно получить числа вида: $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1}+\ldots+a_n\omega + n$, затем вида ω^ω и т.д.

Внимательное изучение этой конструкции позволяет заметить, что «количество» здесь понимается исключительно в разделительном смысле, то есть как нечто состоящее из хорошо различимых частей. Именно этот подход позволяет построить шкалу трансфинитов. Будем в дальнейшем называть его «атомистической гипотезой». Эта гипотеза приводит к тому, что принцип разделительности становится синонимом принципа количественности, а само понятие количества становится предикатом множества, тем самым предметом теории Кантора в конечном итоге становится множество. Он был первым, кто придал этому понятию экстенсиональный характер. Его предшественники, как правило, заменяли «множество» словом «свойство». Например, Б. Больцано следующим образом формулирует теорему о существовании точной верхней грани множества действительных чисел: «Если свойство *M* не принадлежит всем значениям переменной величины *X*, однако если оно принадлежит тем, которые меньше, чем известное *Y*, то всегда существует величина *Y*, являющаяся наибольшей из тех, о которых можно утверждать, что все *X* меньше, чем она, обладает свойством *M*» [10]. Больцано предпочитал рассуждать «по содержанию», а не по «объему». В работе «Парадоксы бесконечного» (1851) он уже свободно говорит о множествах, в том числе и о бесконечных. Он поясняет множество следующим определением: «Совокупность известных вещей или целое, состоящее из известных частей». Однако остается не вполне ясным, мыслил ли Больцано множество в разделительном или в собирательном смысле[4]. Кантор ясно видел различие этих двух смыслов и строил свою теорию на основе разделительного

[4] Множество можно рассматривать как единое целое, а его элементы как причастные этому единству. В таком случае понятие части множества и понятие элемента множества различны. Если понимать множество как аморфное образование, составленное из сущностей, которые теряют свою индивидуальность будучи соединены во множество, то различие «части» и «элемента» теряет смысл, так как всякая часть объекта, лежащего во множестве, становится частью и всего множества. Это различие между разделительным (*distribute*) и собирательным (*collectaneus*) смыслами множества встречается уже у схоластов.

понимания термина «множество». В его статье «К учению о трасфинитном» мы находим: «Если нам дано множество *M*, то его элементы следует представлять себе раздельными».

Кантор подошел к сознанию теории множеств более как философ, чем как математик. Это хорошо видно из его знаменитого определения множества: «Под “многообразием” или “множеством” я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, то есть всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом, я думаю таким путем определить нечто родственное платоновскому *εϊδος* или *΄ιδία*, а также тому, что Платон в своем диалоге «Филеб, или Высочайшее благо» называет *μιχτόν*. Это противополагает его *άπειρονν΄*, то есть безграничному, неопределенному, называемому мной несобственно-бесконечным, равно как и *πέραξ΄*, то есть границе, и называют его упорядоченной «смесью» обоих последних. Что понятия эти пифагорейского происхождения – на это намекает сам Платон» [11].

Увидев во множествах объект математического рассмотрения, Кантор развил теорию чрезвычайной силы и общности. Ключевым моментом в его построении послужили две характеристики множества: «мощность» (*Machtigkeit*) и «количество» (*Abzahl*). Соответствующие определения выглядят следующим образом: «Мощностью или кардинальным числом множества М мы назовем то общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из *M*, когда мы абстрагируемся от количества его различных элементов и от порядка их задания. Напротив, «количество» (позднее Кантор назвал его порядковым типом) – это общее понятие, что получается из *M*, если отвлечься от качества элементов, но сохранить их порядковое различие.

Несмотря на чрезвычайную общность этих понятий, можно увидеть, что они не более чем обобщение количественного и порядкового аспекта натурального числа. Принимая во внимание атомистическую гипотезу, можно видеть, что порядок в данном случае определяется через количество, то есть через элементы некоторого множества. Не углубляясь в хорошо известную область уточнения этих понятий, отметим лишь, что по своему смыслу они должны быть применены далеко не ко всем множествам, а только к тем, которые возникают в процессе порождения согласно высказанным выше принципам. В этом случае эти понятия не отрываются от источника своего возникновения и не создают проблемной ситуации. Однако все разворачивалось по-иному. Признав множество самостоятельным математическим объектом, Кантор вводит принципиально новую операцию – образование множества степени $P(x)$, множества всех подмножеств X. И хотя $P(x)$ уже прямо не связано с первоначальными процессами порождения, Кантор все равно применяет к нему понятие мощности и доказывает, что мощность $P(x)$ строго больше мощности X. Благодаря этой теореме Кантор строит количественную шкалу актуально бесконечного. Одновременно это приводит к беспрецедентному росту множеств, вовлекаемых в новую теорию.

Методология теории множеств оказала определяющее влияние на современный стиль математического мышления. Универсальный характер новой дисциплины постепенно привел к тому, что все, что относится к математике, стало отождествляться с теорией множеств[5]. Она стала неким подобием философии математики[6], а ее собственные философские проблемы совершенно выпали из поля зрения математиков или свелись к метаматематическим вопросам[7]. Это привело к совершенно искаженной картине математики и места в ней теории множеств.

Для Кантора и его современников проблема бесконечного являлась не только математической, но и философской проблемой. Сам Кантор был не только великим математиком, но и компетентным философом. Хорошо зная латынь, он читал в подлиннике сочинения бл. Августина и св. Фомы Аквинского, Паскаля, Декарта, Лейбница и Спинозы. С философией Платона и Аристотеля он был знаком по фундаментальному труду Эдуарда Целлера, с философией Николая Кузанского – по исследованию Циммермана [13]. Статьи Кантора печатались не только в математических изданиях: *Journal Crelle*, *Mathematische Annalen, Acta Mathematica, Gottingen Nachrichten*, но и специальном философском журнале *Zeitschrift für Philosophie und philosoph sche Krithik*.

Поскольку проблемы, связанные с выяснением статуса актуально-бесконечного множества, вновь стали предметом внимания математиков и философов, мы кратко остановимся на философских аргументах самого Кантора, тем более что большинство вопросов по-прежнему не выходит из начертанного им круга.

Прежде чем перейти к позитивной части своей программы, то есть замене принципа Аристотеля «*infinitum ctu non datur»* положением: *«Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari passant*», Кантор тщательным образом анализирует и критикует возражения философов и математиков всех эпох, направленные против актуальной бесконечности.

Для Кантора, как и для Гроссета, потенциально-бесконечное это лишь низший вид бесконечности, вспомогательное понятие нашего разума, заключающего в себе идею изменчивости. Потенциальная бесконечность есть

[5] Яркая картина этой ситуации нарисована П. Вопенкой в предисловии к своей книге «Альтернативная теория множеств». – М., 1983.

[6] Если принимать во внимание тот лингвистический оттенок, который содержится в трактовке философии со времен Б. Рассела и Л. Витгенштейна, то следует говорить о «теоретико-множественном языке». Так и говорят о теории множеств большинство математиков, разумея под этим нечто большее, чем удобное средство выражения.

[7] Так, Георг Крайзель считает, что традиционные вопросы поставлены неверно. Вопрос о реальности математических объектов, по его мнению, суть пошлый («набивший оскомину»). Крайзель предлагает перенести центр тяжести исследований по основаниям математики на математическое доказательство как таковое и не рассматривать его как рассуждение, устанавливающее справедливость теорем, которые утверждают нечто о математических «объектах». Элементарной единицей теории Крайзеля должно быть само «доказательство» [12].

всего лишь простое отношение конечных величин. Такая бесконечность выступает в математике, прежде всего, в значении некоторой переменной, которая либо растет сверх всяких границ, либо убывает до произвольной малости. Данный вид бесконечности – схоластики называли его синкатегорематическим (*cyncategorematicl infinitum; αρπιρον*) – для Кантора есть несобственно-бесконечное (*das Uneigentlich – Unendliche*). Он противопоставляет ему собственно-бесконечное (*das Eigentlich – Unendliche*) или категорематическое (*categorematicl infinitum, αφωριμενων*). Последнее реализуется в математике в форме актуальных бесконечных совокупностей и ординальных чисел.

Собственно-бесконечное существует в трех главных формах. Во-первых, в форме абсолютно-бесконечного, поскольку оно осуществимо в высочайшем совершенстве, в совершенно независимом внемировом бытии: *in Deo extra mundano, aeterno omnipotente* или *in natura naturante*. Во-вторых, актуально-бесконечное существует в зависимом сотворенном мире – *in natura naturata* или *in concreto*. В-третьих, актуальная бесконечность есть *in abstracto*, поскольку она может быть постигнута человеческим разумом в форме трансфинитных порядковых типов.

Если принять отношение философов к этим формам бесконечности, то получится классификация философских школ согласно восьми возможным точкам зрения. Оставляя в стороне вопрос об абсолютно-бесконечном – *in Deo*, по отношению к которому все философы заняли определенную позицию и, ограничиваясь двумя последними формами, Кантор приводит четыре фактически существующих подхода:

1. Можно отрицать актуальную бесконечность как *in concreto*, так и *in abstracto*. Этому подходу следуют математики Коши, Муанье и современные Кантору философы-позитивисты.

2. Можно принимать актуальную бесконечность in concreto, но отвергать *in abstracto*. Эта точка зрения встречается у Декарта, Спинозы, Локка, в некоторой степени у Лейбница, который на протяжении своей жизни высказывал противоречивые воззрения на сущность бесконечного.

3. Можно утверждать актуально бесконечное *in abstracto*, но отрицать ее *in concreto*. Этой точки зрения придерживается часть новосхоластической школы.

4. Наконец, можно принимать бесконечное как *in concreto*, так и *in abstracto*. «На этой точке зрения, которую я считаю единственно истинной, стоят лишь немногие. Может быть, я по времени первый, защищающий ее с полной определенностью и во всех ее последствиях, но я твердо знаю, что не буду последним, защищающим ее» [14]. Кантор, безусловно, принимает и абсолютно-бесконечное. По его мнению, Абсолютное – это предмет спекулятивной теологии, которая должно определить, что можно сказать о нем человеческому уму. К ведению математики и метафизики относится вопрос о формах трасфинитного.

Разбирая доводы философов и математиков в каждом из приведенных случаев, Кантор находит три основные ошибки таких «доказательств».

1. Смешиваются в понятиях разные формы бесконечного. Свойства, присущие одному виду бесконечности, переносятся на другой, вовсе не обладающий этими свойствами. Естественно, рассуждая так, легко прийти к противоречию и сделать неверное заключение о невозможности данной формы бесконечности.

2. Рассуждения, направленные против бесконечного, содержат *petito principi*.

3. Свойства конечных величин некритически переносятся на бесконечные величины.

Наиболее часто смешивают две формы бесконечного: Абсолютное и трансфинитное. Между тем оба этих понятия резко отличны друг от друга: первое следует мыслить безусловно бесконечным и недоступным никакому увеличению, второе же следует мыслить хотя и бесконечным, но все-таки еще допускающим увеличение. Абсолютное не может быть математически детерминировано: «Абсолютное можно только признать, но никогда не познать, хотя бы и приближенным образом» [15]. Однако именно благодаря бытию Абсолютного существуют другие формы актуально бесконечного.

К рассуждениям, содержащим *petito principi*, относится утверждение, что к понятию числа принадлежит его конечность. Кантор считает ничем не оправданным утверждение, что помимо Абсолютного и конечного не существует никаких модификаций, «которые, не будучи конечными, детерминированы с помощью строго определенных и отличных друг от друга чисел» [11, с. 22]. Ошибки третьего рода встречаются в основном в математических работах.

Кантор приводит свои аргументы существования бесконечного. Мы можем охарактеризовать их как математические, гносеологические и теологические. Конечно, эти аргументы не следует рассматривать в качестве неоспоримых доказательств существования актуально-бесконечного, скорее это косвенные доводы, убеждающие нас в этом.

Во-первых, потенциально-бесконечное, которое нашло свое применение в математике, предполагает существование актуально-бесконечного. Действительно, для того, чтобы использовать переменную величину в каком-либо математическом исследовании, «область» ее изменения должна быть известна наперед. Но эта область сама не может быть чем-то переменным, ибо в противном случае такое исследование не имело бы под собой никакой прочной основы. Следовательно, эта область представляет собой некоторое определенное, точно очерченное актуально-бесконечное множество. В свою очередь, допущение актуальной бесконечности в форме бесконечных множеств требует сделать еще один шаг и признать трансфинитные числа как меру количества и порядка бесконечных множеств.

Во-вторых, актуально-бесконечное следует принять, так как человеческое мышление способно постигнуть его *in abstracto*, как математическую величину, число или порядковый тип, что косвенно указывает на существование абсолютной бесконечности.

В-третьих, отрицая возможности *trans finitum, actualec reatum* является умалением абсолютного божественного всемогущества и высочайшего совершенства Творца. Заметим, что этот аргумент, на самом деле, содержит логическую ошибку, на которую обратил внимание Кантора кардинал Францелин. Его доводы мы приведем ниже.

Рассматривая эти аргументы, мы подходим к самому существенному вопросу философии Кантора, а вместе с ней и всей современной математики – проблеме существования математических объектов.

Согласно Кантору, можно говорить в двух смыслах о действительности или о существовании понятий и идей математики.

Во-первых, мы можем считать некоторое понятие действительным, поскольку оно занимает на основе своего определения вполне отчетливое место в нашем рассудке, вполне ясно отличимое от других составных частей нашего мышления, стоит к ним в определенных отношениях. Этот вид реальности Кантор называет имманентной или интра-субъективной реальностью (*immanenta, trans-subjektive Realität*).

Во-вторых, математическим понятиям можно приписать реальность также потому, что их следует рассматривать и как выражение процессов и отношений во внешнем мире, противостоящих интеллекту в телесной или духовной природе. Этот вид реальности он называет транзиентной или транссубъективной реальностью (*transiente, trans-sybjektive Realität*). Кантор постулирует главный принцип своей философии – тождество имманентной и транзиентной реальности. Он говорит: «Для меня не подлежит никакому сомнению, что оба эти вида реальности всегда совпадают в том смысле, что какое-нибудь понятие, принимаемое за существующее в первом отношении, обладает в известных, даже бесконечно многих отношениях и транзиентной реальностью. Правда, установление последней по большей части принадлежит к самым трудным и утомительным задачам метафизики» [11, с. 31]. Это убеждение, как отмечает Кантор, согласовано как с принципами платоновской системы, так и существенной чертой философии Спинозы. У Эдуарда Целлера он находит: «Только абстрактно логическое знание должно, согласно Платону, доставлять истинное познание. Но поскольку нашим представлениям присуща истина, постольку предмету их должна быть присуща действительность, и наоборот, то, что можно познать – то есть, того, чего нельзя познать – нет и в той мере, в какой нечто есть, оно также познаваемо». В «Этике» Спинозы сказано еще короче: «Порядок и связь предметов те же, что и порядок и связь вещей. Эта связь обеих реальностей имеет свой корень в единстве всего, к которому мы сами и принадлежим» [11, с. 22].

Таким образом, Кантор выходит на естественную первооснову любой философской системы. Однако методологические выводы, которые он из этого сделал, были подсказаны ему еще не оформившимися, но уже властными идеями формализма. Они трансформировали единство мира *in Deo* в единство логико-языковое, формальное. Для Кантора как математика это выразилось в превосходстве имманентной реальности над транзиентной. Это ведет, в свою очередь, к снятию любых ограничений на образование математических объектов за исключением единственного требования непротиворечивости. «Математика в своем развитии совершенно свободна и связана лишь тем само собой разумеющимся условием, что ее понятия должны быть свободными от противоречия и должны находиться в неизменных установленных определенными отношениями к образованным ранее, уже имеющимся налицо понятиям. В частности, при введении новых чисел она обязана только дать определение их, благодаря которым они получают такую определенность... что их можно во всех данных случаях определенно отличить друг от друга. Раз только какое-нибудь число удовлетворяет всем этим условиям, то его должно рассматривать в математике как существующее и реальное» [11, с. 31][8].

Идеальным полем реализации этой программы как раз и явилась теория множеств.

Насколько сам Кантор был удовлетворен этим объяснением?

В январе 1886 г. он посылает письмо «одному великому теологу», кардиналу Францелину, в котором, несмотря на выдвинутый принцип, содержится набросок доказательства сотворения Богом трансфинитного мира (см. его теологический аргумент в [11])[9]. Ответ кардинала показал всю зыбкость этой аргументации. Он писал: «Но в одном пункте Вы наверняка заблуждаетесь относительно несомненной истины; но это заблуждение вытекает не из Вашего понятия о *Transfinitum*, а из недостаточного разумения Абсолютного. В Вашем любезном письме ко мне Вы говорите, что, во-первых, правильно (предполагая, что Ваше понятие о *Transfinitum* не только безукоризненно религиозно, но и истинно, о чем я не берусь судить), что одно доказательство исходит из понятия Бога и умозаключает прежде всего от высочайшего совершенства Божественного существа к возможности сотворения *Transfinitum ordinatum*. Предполагая, что Ваше *Transfinitum* не содержит в себе никакого противоречия, Ваше заключение из понятия Божьего всемогущества к возможности сотворения *Transfinitum* вполне правильно. Но, к моему сожалению, Вы делаете дальнейший шаг и умозаключаете «от его всеблагости и величия к необходимости фактически последовавшего сотворения *Transfinitum*. Именно потому, что Бог есть сам по себе Абсолютное бесконечное Благо и Величие – которые не могут быть ни увеличены, ни уменьшены – необходимость сотворения, каково бы это последнее ни было, представляет противоречие. Свобода сотворения предполагает такое же не-

[8] Формулировку этого принципа часто неверно приписывают А. Пуанкаре. «Слово существовать в математике может иметь только один смысл, оно означает именно отсутствие противоречия» (Пуанкаре. А. Математика и логика // Новые идеи в математике. – СПб., 1815. – № 10. – С. 6). Однако сам он, несомненно, заимствовал его у Кантора, работы которого прекрасно знал и даже перевел на французский язык.

[9] Само письмо Кантора не сохранилось.

обходимое совершенство Бога, как и все прочие его совершенства или лучше: бесконечное совершенство Бога есть (согласно нашим необходимым различиям) точно так же свобода, как всемогущество, мудрость, справедливость и т.д. Согласно Вашему заключению о необходимости сотворения *Transfinitum*, Вы должны были пойти много дальше. Ваше *Transfinitum actuale* доступно увеличению, но если бесконечная благость и величие Бога требуют вообще с необходимостью сотворения *Trancfinitum*, то отсюда следует – ввиду той же самой бесконечности Его величия и благодати – необходимость его увеличения до тех пор, пока оно не стало бы недоступным дальнейшему увеличению, что противоречит Вашему собственному понятию о *Transfinitum*. Иными словами, кто из бесконечной благости и величия Бога умозаключает о необходимости сотворения, тот должен утверждать, что все доступное созданию создано в действительности от века, перед Божьим оком нет ничего возможного, что могло бы вызывать в действие его могущество. Это несчастное мнение о необходимости создает Вам большие препятствия при борьбе с пантеистами и, во всяком случае, ослабит силу Вашей аргументации. Я так подробно остановился на этом пункте, потому что я желаю Вам самым горячим образом, чтобы Ваша проницательная мысль освободилась от столь рокового заблуждения, в которое, правда, впадают многие иные лица, даже такие, которые считают себя правоверными».

Комментируя этот ответ, можно видеть, что адресат Кантора сразу уловил принципиальное различие между возможностью существования *Transfinitum actuale*, которое обеспечивается принципом непротиворечивости и необходимостью, которая всецело находится в руках Абсолютной свободы. Таким образом, тождество имманентной и транзиентной реальности фактически лишено теологической аргументации и объяснимо лишь в рамках метафизики языка.

Программа Бурбаки. Лингвистическая философия

Несмотря на обрисованные выше трудности, основная метафизическая цель теории Кантора была достигнута – была выделена универсальная сущность, которую можно было положить в основу семантики будущего универсального языка математики. Глубинная диалектика бесконечного и множества отошла на второй план. Основное внимание сконцентрировалось на выявлении «правил» образования новых сущностей на основе понятия множества. В контексте этой задачи и возникает «Программа Бурбаки». В своей сути эта программа – точный семантический аналог синтаксических правил, по которым из некоторого ограниченного набора знаков, алфавита, должны порождаться корректные с точки зрения языка слова. Такими семантическими «словами» в программе Бурбаки стали структуры. Как известно, Бурбаки предлагают три основных «правила» – три фундаментальные структуры:

1) алгебраические структуры;

2) структуры порядка;

3) топологические структуры.

Комбинация этих структур, по мысли Бурбаки, должна охватить весь настоящий и будущий математический универсум [16].

Параллельно развивался процесс уточнения синтаксиса языка математики. Безусловно, эти два процесса должны были рано или поздно встретиться. Такой точкой встречи стала аксиоматическая теория множеств, хотя непосредственным поводом к ее появлению послужили парадоксы «наивной» теории множеств. Как известно, существует несколько существенно различных аксиоматик: **ZF** (Цермело–Френкеля), **GB** (Геделя–Бернайса), **TT** (Теория типов Рассела), New Foundations и др. Каждая из них дает свой образ теории множеств.

Сама по себе работа по созданию подобного языка представляет чисто умозрительный интерес, поскольку мир вещей видится существенно богаче любой языковой конструкции, тем более формализованной. Как уже подчеркивалось выше, нужна убедительная теория, отождествляющая мир вещей и мир языка. В этом случае язык приобретает метафизический характер. Такой теорией, как известно, явилась «лингвистическая философия», начало которой было положено Л. Витгенштейном в «Логико-философском трактате».

Суть этого трактата, а вместе с ним и всей лингвистической философии, достаточно точно передают следующие, извлеченные из него афоризмы.

1. *Die Welt ist die Gesamtheit der Tatsachen, nicht der Dingen.* («Мир – совокупность фактов, а не предметов»).

2. *Die Welt ist durch die Tatsachen bestimmt und dadurch, daß es alle Tatsachen sind*. («Мир определен фактами и тем, что это все факты»).

3. *Die Tatsachen im logischen Raum sind die Welt*. («Мир – это факты в логическом пространстве») и т.д. [17].

Теория множеств, заключенная в рамки метафизического языка, достигла впечатляющих успехов. Но именно на пике своего могущества она вступила в затяжной, мучительный для нее конфликт с математикой.

Дело в том, что теоретико-множественная математика крайне формализована. В ней, в известном смысле, все «просчитано» заранее, а свободы для создания чего-то своего или (что более важно) возможностей адекватного отражения мира не больше, чем, скажем, возможностей компьютерного «творчества» в среде Microsoft Office. Многим это импонирует, ибо в хорошо организованном мире легче жить. Но чем дольше в нем живешь, тем более возрастает ощущение искусственности этого мира. Жажда «бытия» становится основным и очень энергичным мотивом. Разумеется, коль скоро речь идет о языке, это стремление должно быть определенным образом формализовано. Возможный путь такой формализации обсуждается далее.

Проблема континуума «внутри» и «вне» метафизического языка множеств

Теория множеств в ранге метафизического языка существенно трансформирует не только математический ландшафт, но и свои собственные, внутримножественные проблемы. Фундаментальным примером этому может служить континуум – проблема, ставшая, благодаря особому статусу теоретико-множественного языка, одной из наиболее значимых проблем математики XX в.

Континуум – безусловно, ключевая проблема теории множеств, суть которой состоит в определении места мощности континуума на кардинальной шкале. По сути, речь шла о вызове идущей от Аристотеля традиции, о невозможности представления непрерывного в виде множества неделимых элементов. Разумеется, Кантор это хорошо понимал и поэтому придавал этой проблеме исключительное значение. История возникновения и ответов на эту проблему К. Геделя и П. Коэна заслуживает отдельного рассмотрения именно в плане трансформации «бытия» метафизическим языком.

Кантор предположил, что мощность континуума равна первому несчетному кардиналу $\aleph_1$. Эта «континуум-гипотеза» незаметно изменила характер проблемы. Дело в том, что мощность множества является его имманентным свойством, причем в условиях аксиомы выбора – это вполне определенное кардинальное число. Отсутствие мощности у множества или установление факта ее неоднозначности заставляет усомниться в том, что объект, обладающий этими свойствами, действительно является множеством. Иное дело – утверждение о кардинальном числе, выражающем эту мощность (в данном случае уместна аналогия с длиной как математической сущностью и ее числовым выражением, величиной). Для определения кардинального числа, как известно, нужна биекция: 1-1 соответствие между данным множеством и множеством-кардиналом. При этом предполагается, что биекция возможна или невозможна для *уже существующих множеств* (что входит в определение биекции).

Такова «наивная» точка зрения, исходящая из «теоретико-множественного реализма» (транзиентной реальности в терминологии Г. Кантора).

Континуум-гипотеза, утверждая существование биекции между $\aleph_1$ и континуумом c, сразу попадает в разработку метафизического языка и построенной в его рамках аксиоматики. При этом вопрос ставится так: является ли континуум-гипотеза или ее отрицание теоремами в фиксированной аксиоматике, например **ZF**? В такой постановке предположение Кантора идейно приравнивается к аксиоме о параллельных прямых, а система **ZF** – к евклидовой геометрии. Такие параллели, безусловно, делают проблему понятнее, особенно в широких кругах, но мало соответствуют первоначальному вопросу Кантора.

Заметим, что существование биекции уже не является имманентным свойством множества и определяется аксиоматической системой, в которую погружен континуум (образно говоря, биекция – это «линейка», которую мы «прикладываем» к множеству). Очевидно, что наличие или отсутствие такой «линейки» говорит лишь об инструментальных возможностях данной аксиоматики. Таким образом, центр тяжести в решении проблемы континуума переносится на осмысление тех или иных принципов построения множества, которые зафиксированы в аксиомах. История обсуждения этих принципов затянулась на десятилетия, и на сегодняшний день считается, что адекватным выражением первоначального замысла Кантора является аксиоматическая система **ZF.** Что касается континуум-проблемы, то, согласно результатам К. Гёделя (1940 г.) и П. Коэна (1963 г.), она не зависит от остальных аксиом **ZF,** что дает повод трактовать ее в духе пятого постулата Евклида. Однако ситуация здесь более тонкая. Доказательство независимости континуум-гипотезы осуществляется путем построения моделей, в которых континууму можно непротиворечивым образом приписать широкий спектр кардинальных чисел. Такая «подвижность» мощности континуума говорит о том, что ресурсов **ZF** не хватает, чтобы указать его место на кардинальной шкале. Более того, различные усиления **ZF** не меняют картины.

Если следовать принципу Витгенштейна «мир есть совокупность фактов, а не вещей», эта ситуация носит фундаментальный характер и говорит о том, что мощность континуума релятивизована теми принципами («фактами»), которые заложены в аксиомах **ZF** и спроецированы на континуум. В этом ключе вопрос: какова же истинная мощность континуума представляется наивным и некорректным.

В рамках теории одной сущности – «множества» такой ответ является единственно возможным, но он не обладает той самодостаточностью, которая позволяет считать его «окончательным решением» континуум-проблемы. Разумеется, можно считать, что кардинальное число континуума существенно «не наблюдаемо» («невозможно для нас, людей» по выражению Ж. Адамара), то есть находится в зазоре между предметным миром и языком. Такой подход, делающий континуум «вещью в себе», в принципе возможен, но не обладает желаемой познавательной ценностью.

Возможна, однако, иная интерпретация результатов Гёделя–Коэна, суть которой в общих чертах состоит в следующем.

Исключительными усилиями Г. Кантора понятие «множества» приобрело статус универсальной математической сущности (пункт 1.1). С точки зрения языка это означало, что слово «*Menge*» получило столь развернутое семантическое поле, что возникло желание (или искушение?) придать этому слову статус существования (ровно такой, какой получил Мартовский Заяц в известной сказке Л. Кэролла, который «жить – то жил, а быть – то не был). Однако язык с одноэлементным алфавитом «*Menge*» обладает ограниченными выразительными возможностями, но в случае двухэлементного алфавита: «*Menge*» и «*nicht-Menge*» (или, например, «0» и «1») возможности языка, даже исходя из формальных соображений, существенно выше. Проблема заключается в том, чтобы придать слову «*nicht-Menge*» позитивный смысл, то есть проделать работу, аналогичную работе Кантора по созданию семантического поля этого слова. Не ставя здесь перед собой такой задачи, детали которой более полно представлены в [28], [19], укажем только общее направление этой работы, рассмотрев на отвлеченном примере интерпретацию результатов о независимости континуум-гипотезы.

Предположим, в комнате стоит стол и на нем стоит пустая ваза. Вы начинаете заполнять ее яблоками, причем, как только вы положите следующее яблоко, вы делаете фотоснимок комнаты. Что вы видите? Вся обстановка комнаты остается неизменной, но в вазе последовательно оказываются: *1, 2, 3* и т.д. яблок. Сравним эти фотоснимки с моделями **ZF,** в которых $c = \aleph_1$, $c = \aleph_2$, $c = \aleph_3$... При всех имеющихся различиях нетрудно понять, что обе эти серии являются иллюстрацией одного и того же механизма. Однако в случае фотоснимков комнаты мы знаем, что за увеличением числа яблок в вазе стоят действия субъекта. Что касается моделей **ZF**, то теория множеств принципиально «запрещает» существование подобного «субъекта». Образно говоря, в теории множеств можно рассматривать отдельные «кадры», из которых невозможно создать «фильм». Заметим, что в случае моделей **ZF** найти «субъекта», ответственного за постоянное «пополнение» континуума c, несложно – это диагональный процесс, который в традиционной трактовке именуется «диагональным методом». Примечательно, что основной технический инструмент, с помощью которого П. Коэн доказал независимость континуум-гипотезы от остальных аксиом **ZF** – метод форсинга, – как раз и является разработкой диагонального метода (см. [20]). Возвращаясь к вопросу сущности «*nicht–Menge*», можно предположить, что она должна иметь абстрактно-процессуальный характер и должна явиться метафизической основой разнообразных видимых процессов, аналогично тому, как множество является основой разнообразных структур. Как и в случае множества, можно найти понятие, которое адекватно выражает эту абстрактно-процессуальную идею. Это понятие «неподвижного времени», введенное выдающимся мыслителем преп. Максимом Исповедником.

Дальнейшее развитие этих положений осуществляется уже вне рамок данной работы.

Автор выражает благодарность своему другу кандидату физико-математических наук Ю.В. Гавриленко, который дал начальный импульс размышлениям о сущности теории множеств и во многом способствовал формированию изложенной точки зрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гвардини Р.* Конец нового времени / рус. пер.: Вопросы философии. – 1980. – № 4.
2. Бесконечность // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – Т. 1.
3. *Аристотель.* Соч. – Т. 3. – М., 1981.
4. Начала Евклида. Книги VII–X. – М., 1949.
5. *Гайденко П.П.* Эволюция понятия науки (XVII–XVIII вв.). – М.: Наука, 1987.
6. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – Ч. 1. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1937. – С. 83.
7. *Богомолова А.С.* Актуальная бесконечность (Зенон Элейский, И. Ньютон, Г. Кантор). – М.-Л., 1934.
8. *Больцано Б.* Парадоксы бесконечного. – Одесса, 1911.
9. *Кантор Г.* К учению о трансфинитном // Труды по теории множеств. – М., 1985.
10. *Больцано Б.* «Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между любыми двумя значениями, дающими результаты противоположного знака, лежит, по крайней мере, один действительный корень уравнения» / Приложение к книге Э. Кольмана «Бернард Больцано». – М., 1955.
11. *Kantor G.* Grundlagen einer Manngfaltigkeitslehre. – Leipzig, 1983. – С. 69.
12. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. – М., 1981.
13. *Zeller E.* Die Philosophie der Grichen; Zimmerman R. Der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorganger Leibnizeus, 1852.
14. *Кантор Г.* О различных точках зрения на актуально бесконечное. URL: http://www.chestisvet.ru/index.php4?id=25&vopr=97&vopr_name=%C3%E5%EE%F0%E3%20%CA%E0%ED%F2%EE%F0.%20%CE%20%F0%E0%E7%EB%E8%F7%ED%FB%F5%20%F2%EE%F7%EA%E0%F5%20%E7%F0%E5%ED%E8%FF%20%ED%E0%20%E0%EA%F2%F3%E0%EB%FC%ED%EE%20%E1%E5%F1%EA%EE%ED%E5%F7%ED%EE%E5
15. Учение о множествах Георга Кантора // Сборник № 6 «Новые идеи в математике» / пер. П. Юшкевича, работы 7–9. – СПб., 1914 – С. 70.
16. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. – М.: USSR, 2009.
17. *Витгенштейн Л.* Логико-философский трактат // Философские работы. Ч. 1. – М.: Гнозис, 1994.
18. *Векшенов С.А.* Метафизика и математика двойственности // Метафизика век XXI. – Вып. 4. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
19. *Бешенков А.С.* Множество и процесс «Нераздельно и неслиянно» // Вопросы современной науки и практики. – Университет им. В.И. Вернадского. – 2011. – № 4 (35). – С. 58–62.
20. *Векшенов С.А.* Метод форсинга и диагональная конструкция // Вестник Тамбовского университета. – 2000. – Т. 5. – Вып. 5. – С. 547–550.