
ПОРЯДКОВЫЕ ОБРАЗЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И КВАТЕРНИОНОВ В ОСНОВАНИЯХ ФИЗИКИ

С.А. Векшенов, А.С. Бешенков

Российская академия образования

В статье рассматривается порядковый образ фундаментальной цепочки чисел $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Показывается, что порядковый образ кватернионов лежит в основе этой цепочки, а натуральные числа, напротив, являются структурой, построенной на порядковых образах кватернионов. Это, в частности, открывает возможность построения континуума, определяемого физическими процессами.

Ключевые слова: принцип двойственности, порядковая бесконечность, фундаментальное вращение, порядковый образ.

Введение

Как известно, традиционная задача физической науки со времен Галилея состояла в описании реальности на языке математики, причем такое описание должно было обладать свойством предсказания новых, экспериментально проверяемых эффектов.

В физике XX в. появляются новые мотивы – возникает потребность синтеза ранее созданных теорий. Началом этого процесса можно считать специальную теорию относительности, которая объединила механику Ньютона и электродинамику Максвелла. В работах основоположников этой теории, прежде всего А. Пуанкаре, была определена методология такого объединения на основе абстрактных математических структур, в которые «вписываются» объединяемые теории. В случае теории относительности такой структурой явилась группа Лоренца, которая согласно идеологии Эрлангенской программы должна определять некоторую геометрию. Заметим, что и в классической работе Эйнштейна 1905 г. реализована фактически та же методология: в ней обрисована математическая структура, в которой одновременно выполняются два ключевых факта объединяемых теорий: принцип относительности и постоянство скорости света.

При таком подходе, однако, возникает следующий пласт методологических проблем:

- существует ли возникшая структура как математический объект?
- имеется ли за этой структурой физическая реальность?

От первой из названных проблем нас освободил еще создатель теории множеств Г. Кантор, заявивший, что всякая внутренне непротиворечивая математическая структура имеет статус существующего («существовать – значит быть свободным от противоречия»). Что касается второй проблемы, то ситуация здесь более тонкая. Как показывает практика, синтез можно

осуществить на основе различных математических структур. Какая из них соответствует реальности? П. Дирак утверждал, что «самая изящная» («Physical laws should have mathematical beauty»). Но может быть, имеется и другой критерий?

«Поставщиком» структур для осуществления синтеза, естественно, является математика, в которой процесс синтеза различных областей начался несколько раньше (приблизительно с момента появления уже упомянутой Эрлангенской программы). С развитием теории множеств, аксиоматики и появлением Программы Бурбаки этот процесс принял небывалый размах. Именно теоретико-множественная (а в менее абстрактной форме – геометрическая) методология стала восприниматься как основной инструмент осуществления синтеза разнообразных физических концепций. Решающим фактором развития именно этого направления был успех теории относительности и убежденность ее создателя в том, что именно геометрия только и способна обеспечить необходимый синтез.

Разумеется, физика XX в. помимо синтеза теорий занималась и своим «прямым делом» – описанием новых областей реальности. Случалось так, что эти вновь созданные теории немедленно вовлекались в процесс синтеза. Самый показательный тому пример – квантовая теория и попытки её синтеза с общей теорией относительности. При этом, разумеется, попытки осуществления такого синтеза предпринимались в рамках теоретико-множественной (геометрической) методологии. Как известно, приемлемого решения получить так и не удалось. Как нам представляется, корень проблемы лежит в принципиальном различии теории относительности и квантовой теории.

Теорию относительности можно считать вполне математической теорией в том плане, что у нее нет «темных углов», не охваченных формализаций, поскольку она изначально строилась как синтетическая структура. Иначе выглядит квантовая теория. Сам феномен квантования, несмотря на его внешнюю очевидность, не получил в её рамках адекватного истолкования, а известные на сегодняшний день формализмы квантовой теории явно неполны. Иными словами, квантовая теория во многом остается «живой», не до конца формализованной теорией. При таком положении дел всякая попытка синтеза в принципе обречена на неудачу, поскольку всякому синтезу предшествует *полная формализация* (в естественных границах, разумеется).

Осознание этого факта привело к возникновению направления, условно названного «основания физики», важнейшей задачей которого стал поиск математических структур, которые в принципе могли бы обеспечить желаемый синтез.

К теориям из области оснований физики можно отнести Твистерную программу Р. Пенроуза и Бинарную систему комплексных отношений (БСКО) Ю.С. Владимирова. Каждая из этих теорий использует свою методологию построения синтезирующих структур.

Теория Пенроуза явно тяготеет к упомянутой выше геометрической методологии. Достаточно сказать, что фундаментальные конструкции этой теории опираются на чисто геометрическое понятие – сферу Римана [1].

В теории Владимирова намечена тенденция отхода от априорных геометрических представлений и развитие концепции динамических структур, на основе которых можно осуществить переход от первичных структур квантовой теории к четырехмерному пространству-времени [2].

Несмотря на значительные различия теорий Р. Пенроуза и Ю.С. Владимирова, они сходятся в одном принципиальном моменте – опоре на комплексные числа. Можно предположить, что именно комплексные числа и, в более общем случае, кватернионы отражают существенные особенности квантовой теории. На ряд таких особенностей указывает БСКО. Достаточно определенно о роли математики кватернионов в основании квантовой теории говорит А.П. Ефремов [3].

Как нам представляется, именно кватернионные структуры (которые в ряде случаев сводятся к комплексным структурам) «ответственны» за появление самого феномена квантования, и, напротив, квантование приводит к появлению структур, которые можно соотнести с комплексными числами и кватернионами. Однако увидеть это соотношение в рамках их традиционного, количественного понимания не представляется возможным. Для этого необходимо осуществить переход к порядковым образам названных чисел, что требует привлечения основных понятий и положений концепции двойственности, развиваемой в работах авторов.

Ниже, в тезисной форме, представлены основные положения этой концепции, необходимые для обсуждения сформулированных выше проблем.

1. Принцип двойственности

В основе принципа двойственности лежит известный еще со школы факт, что всякое натуральное число n является единством «количества» и «порядка». Например, число **семь** подразумевает наличие семи каких-либо предметов и седьмого по счету предмета в каком-либо пересчете.

Сразу бросается в глаза отсутствие симметрии количественного и порядкового компонентов числа. Количественная составляющая, то есть семь предметов, вполне определяются самим числом 7, в то время как «седьмой предмет» подразумевает фиксацию некоторого начала отсчета, информация о котором в числе 7 не содержится.

Такое отсутствие симметрии в конечном итоге привело к доминированию количественной точки зрения на природу числа, которая получила всеобщий характер после создания Г. Кантором теории множеств.

Теория множеств сформировала «количественно-ориентированный» стиль мышления, который в настоящее время доминирует в математике. Не вдаваясь во все аспекты этого доминирования (это частично сделано в работах [4], [6]), можно сказать, что на сегодняшний день существуют веские

причины вернуться к пониманию важности двойственного характера натурального числа и, опираясь на это понимание, сформулировать универсальный принцип двойственности. Суть этого принципа двойственности состоит в том, что для *каждого* «количественного» объекта A *всегда* найдется его «порядковый» образ. Понятия «количества» и «порядка», разумеется, не имеют четко очерченных границ, однако, учитывая связь идей количества и порядка пространства и времени, можно сказать, что принцип двойственности утверждает, что каждому пространственному объекту соответствует временной объект.

Наиболее радикальным следствием принципа двойственности является утверждение о существовании бесконечности Ω , двойственной к количественной бесконечности ω (в данном случае ω в большей мере является символом этой бесконечности, чем обозначение первого бесконечного ординала).

Единый подход к определению этих двух бесконечностей в общих чертах состоит в следующем (более подробно вся конструкция приведена, например, в [4]).

Рассмотрим некоторый неограниченный процесс W (при этом мы хорошо понимаем, что этим символом обозначается именно процесс, *durée* в смысле А. Бергсона). Шаги этого процесса мы можем различать или не различать в зависимости от набора имеющихся у нас предикатов.

Предположим, что шаги процесса W различаются некоторым предикатом $T(x,y)$, в результате чего мы видим некоторый дискретный неограниченный процесс (если шаги этого процесса не различимы никаким предикатом, то мы видим некоторую целостность, но не видим движения, а только *a'rgiōi* знаем, что оно есть). Будем обозначать такой видимый процесс как W_T .

Предположим далее, что с некоторого конкретного шага процесса W_T все остальные шаги будут неотличимы друг от друга в смысле предиката T . В этом случае этот стабилизированный фрагмент процесса W_T определяет бесконечный в смысле предиката T по отношению к остальным фрагментам данного процесса объект.

Существенную роль в этом подходе играют два предиката:

- $T_R(x,y)$: равенство x и y в смысле «количества»;
- $T_Z(x,y)$: равенство x и y в смысле «порядка».

При этом «количество» и «порядок» понимаются интуитивно в рамках интуиции «натурального числа». Бесконечный объект процесса N_{T_R} будем отождествлять с ω , а бесконечный объект процесса N_{T_Z} – с Ω , где N – процесс порождения натуральных чисел.

Очевидно, что ω по своему смыслу является количественной бесконечностью и может быть представлена в виде бесконечного множества (точнее, бесконечное множество является *носителем* количественной бесконечности). Порядковая бесконечность Ω имеет иную природу, и ее носитель не может быть представлен множеством [4], [5], [6].

Принцип двойственности позволяет расширить понятие актуальной бесконечности путем включения «в оборот» порядковой бесконечности. Это наводит на мысль о целесообразности развития общей теории бесконечности, которая пришла бы на смену теории множеств.

Основываясь на приведенной выше схеме «свертывания» неограниченного процесса в бесконечный объект, общую теорию бесконечности можно определить так.

Общая теория бесконечности – это теория о свертывании неограниченных процессов в бесконечные объекты (бесконечности) и о свойствах носителей этих бесконечностей. Данный взгляд на бесконечность является очень существенным для всех дальнейших построений.

2. Основные конструкции и теоремы

Имея в распоряжении два бесконечных объекта Ω и ω , естественно возникает вопрос об их соотношении. Бесконечный объект ω является таковым только в смысле предиката T_R . В смысле предиката T_Z – это конечный объект. Из этого простого соображения вытекает принципиальной важности неравенство:

$\Omega > \aleph_\delta$, где $\aleph_\delta$ – какой-либо кардинал.

Суть этого неравенства состоит в том, что математический универсум в количественно-порядковом (или пространственно-временном) ракурсе не симметричен. Это видится весьма нетривиальным фактом и, строго говоря, оправдывает развитие всей изложенной выше концепции двойственности.

Как известно, фундаментом всей математики являются натуральные числа, которые, по известным словам Л. Кронекера, были «сотворены Господом Богом». Однако трудно предположить, что Господь Бог одновременно сотворил и аксиоматику, которая описывает процесс возникновения этих чисел и их свойства. Скорее всего, Д. Пеано просто следовал сложившейся научной традиции, видя в аксиоматике некую идеальную форму представления Божьего творения. В этом случае имеется принципиальная возможность найти иную форму проявления в нашем умственном взоре идеи натурального ряда.

В рамках концепции двойственности эта возможность получает конкретную реализацию. Названная реализация основывается на следующих теоремах [7].

Теорема 1. Если шаги процесса W различимы одним предикатом B , то он совпадает с T_Z .

Теорема 2. Если шаги процесса W различимы только двумя предикатами B_1, B_2 , то один из них есть T_R , а другой – T_Z .

Теорема 3. Если, кроме того, предикаты T_R и T_Z эквивалентны (в том смысле, что каждый шаг можно количественно «очислить»), то процесс γ изоморфен последовательности натуральных чисел.

Картину, которую описывают эти теоремы, наглядно можно представить следующим образом.

а) Введение предиката T_Z позволяет представить процесс W (*durée*) в виде процесса W_{T_Z} с различными шагами $\rightarrow$ (рис. 1)

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \dots$

Рис. 1

б) Введение предиката T_R в дополнение к предикату T_Z позволяет фиксировать число шагов процесса T_Z от его начала. При этом существует неограниченное число шагов, для которых такая фиксация невозможна (следствие неравенства $\Omega > \omega$). Наглядно этот процесс можно представить так (рис. 2):

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$

• • • •
• • •
• •
-
•

Рис. 2

Будем записывать этот процесс как $W_{T_R;T_Z}$.

На рис. 2 хорошо видно, что процесс W_{T_Z} «длиннее» процесса $W_{T_R;T_Z}$, поскольку у W_{T_Z} имеется «хвост»: $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$, который принципиально не «очисляется» (в количественном смысле).

в) Тем не менее, если предположить, что $T_R \sim T_Z$, этот «хвост» каким-то образом распределяется внутри «очисленных» шагов и, согласно теореме 3, процесс $W_{T_R;T_Z}$ и $T_R \sim T_Z$ будет изоморфен последовательности натуральных чисел.

Таким образом, в данном подходе натуральный ряд «высекается» из некоторой целостности (процесса W) с помощью предикатов «количества» и «порядка» (говоря словами Микеланджело, «убирается все лишнее») [9].

Расширяя семантическое поле теорем 1–3, мы приходим к следующей фундаментальной теореме о характере носителя бесконечности в зависимости от свойств определяющих ее предикатов [4].

Теорема 4. Для того чтобы шаги $\rightarrow$ процесса W_{T_Z} сделать элементами и образовать из этих элементов множество, необходимо, чтобы они различались, по крайней мере, еще одним предикатом (если это только один предикат, то по теореме 2 он совпадает с T_R).

Следствие. Если совокупность некоторых объектов различима только одним предикатом, то он совпадает с T_Z . Это означает, что из этой совокупности объектов нельзя образовать множество.

Следствием этого «следствия» является утверждение о том, что континуум, понимаемый в канторовском смысле, не является множеством. Действительно, поскольку элементы континуума различаются только одним предикатом (что вытекает из не вполне эффективной упорядоченности континуума), этот предикат совпадает с предикатом T_Z , который, в свою очередь, указывает на порядковую бесконечность. Носителем этой бесконечности является *сверхмножество*.

Отсюда, в частности, следует, что континуум является *переменной величиной*, то есть для любого λ мощность континуума c больше кардинала $\aleph_\lambda$. Таким образом, континуум – проблема, состоящая в указании места континуума (вернее, его теоретико-множественной модели) на кардинальной шкале, оказывается принципиально некорректной.

Из всех предыдущих пунктов вытекает следующее.

А. Из теоремы 3 вытекает принципиальная возможность перехода обсуждений возникающих проблем с количественного на порядковый (структурный уровень). Можно ожидать, в частности, что с помощью «стрелочных» структур можно построить замкнутую в себе теорию действительных чисел. Оказывается, еще в 1973 г. Дж. Конвей построил «стрелочную» модель действительной прямой (даже нестандартной прямой). Однако он построил ее именно как модель, без всякой связи с теорией двойственности (которой в 1973 г. еще не было). Возможность такой модели является непосредственным следствием теоремы 3.

Естественно, встает вопрос о расширении «стрелочных» моделей на комплексные числа и кватернионы. Ниже мы предложим решение этой проблемы.

Б. Из следствия теоремы 4 вытекает, как уже подчеркивалось, что континуум в канторовском смысле, вопреки желанию его создателя, является переменной величиной. Это обстоятельство трансформирует изначальный канторовский вопрос о месте континуума на кардинальной шкале в вопросе о его характере как переменной величины.

Разумеется, предположение о линейном характере этой величины, как движении от элемента к элементу, не выдерживает критики, поскольку в этом случае сразу же возникает неограниченный процесс «углубления», ведущий к отдельному элементу континуума. За этим немедленно следует весь спектр апорий Зенона, которые, как известно, не поддаются полностью приемлемому решению. В рамках данной статьи мы попытаемся ответить на этот вопрос.

3. Математические структуры и их интерпретации

Поскольку понятие порядковой бесконечности, равно как и понятие ее носителя – сверхмножества, было введено формальным путем, их продвижение от оснований математики в ее верхние этажи требует для них содержательного толкования.

В соответствии с основной задачей общей теории бесконечности – об «извлечении» из неограниченного процесса бесконечного объекта, приведем прямые конструкции извлечения – T_R и – T_Z бесконечных объектов, соответствующих их формальному определению [4], [5], [6].

а) T_R – бесконечный объект ω получается путем мысленного объединения в одно целое всех шагов процесса W_{T_Z} , что соответствует теоретико-множественному подходу.

б) T_Z – бесконечный объект Ω может быть получен путем простейшего замыкания процесса W_{T_Z} (рис. 3):

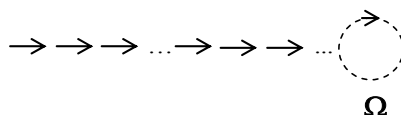


Рис. 3

Это значит, что порядковую бесконечность Ω можно интерпретировать как некоторое абстрактное вращение, которое в дальнейшем мы будем называть **фундаментальным вращением**.

Попытаемся более детально разобраться в структуре фундаментального вращения.

1) Заметим, что различные структуры фундаментального вращения соответствуют различным порядковым бесконечностям, так же как различные кардиналы соответствуют различным количественным бесконечностям.

Начнем с очевидного замечания, что добавление к простейшему фундаментальному вращению (которое мы будем обозначать как $\cup$) шага $\rightarrow$ не меняет этого вращения. В свободной форме это можно записать: $\cup + \rightarrow = \cup$.

Это значит, что $\rightarrow$ можно понимать как некий аналог периода фундаментального вращения $\cup$. Очевидно также, что наравне с вращением $\cup$ можно рассматривать обратное фундаментальное вращение $\cup$.

Наличие двух разнонаправленных фундаментальных вращений $\cup$ и $\cup$ позволяет составлять более сложные цепочки, например: $\cup \cup \cup \cup \cup \cup \cup \dots$. Эти цепочки можно рассматривать как фундаментальное вращение с более сложной конфигурацией замыкания.

При этом важно понимать, что такая конфигурация представляет собой чистую «фигуру времени», которая не может быть адекватно использована никакими пространственными или теоретико-множественными образами.

Возможна ситуация, когда линейные шаги не являются однонаправленными. Например, количество шагов $\rightarrow$ совпадает с количеством шагов $\leftarrow$.

В этом случае замыкание такого линейного процесса приведет к иному типу фундаментального вращения $\mathcal{O}$ (рис. 4):

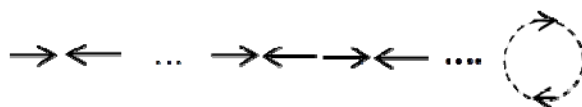


Рис. 4

Для этого вращения также можно найти обратное вращение $\mathcal{O}$. Как и в предыдущем случае, можно составлять цепочки из фундаментальных вращений этого типа, например: $\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}\mathcal{O}\dots$

Эти вращения, хотя и не имеют прямого физического аналога (одновременного вращения в двух противоположных направлениях), однако играют ключевую роль в описании именно физических процессов. Об этом пойдет речь ниже.

2) Из принципа двойственности вытекает факт наличия у каждого количественного числа его порядкового образа. В случае натурального ряда существование такого образа подкрепляется теоремой 3. Опираясь на абстрактные линейные шаги $\rightarrow$ и $\leftarrow$ и фундаментальные вращения $\mathcal{U}$ ($\cup$) и $\mathcal{O}$ ($\circ$), можно представить весь спектр порядковых образов фундаментальной цепочки:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

Набор этих образов выглядит так [6]:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^{\sim} &: \{ \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots \} - \text{образ } \mathbb{N}, \\ \mathbb{Z}^{\sim} &: \{ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \dots \} - \text{образ } \mathbb{Z}, \\ \mathbb{R}^{\sim} &: \{ \rightarrow \leftarrow \rightarrow \dots \leftarrow \rightarrow \dots \} - \text{образ } \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}^{\sim} &: \{ \rightarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \dots \cup \cup \mathcal{U} \dots \} - \text{образ } \mathbb{C}, \\ \mathbb{H}^{\sim} &: \{ \rightarrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow \dots \cup \cup \mathcal{U} \dots \mathcal{O} \mathcal{O} \mathcal{O} \dots \} - \text{образ } \mathbb{H}. \end{aligned}$$

При этом совокупность порядковых чисел выбранного класса ($\mathbb{N}^{\sim}, \mathbb{Z}^{\sim}, \mathbb{R}^{\sim}, \mathbb{C}^{\sim}, \mathbb{H}^{\sim}$) можно рассматривать как модель соответствующего класса количественных чисел.

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений.

Порядковые образы комплексных чисел будем обозначать как $\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha} = (\uparrow)^{\alpha} (\cup)_{\beta}$, где α и β – количественные числа, описывающие, согласно модели Конвея, структуру линейных шагов и фундаментальных вращений соответственно (из соображений удобства горизонтальные стрелки располагаются вертикально).

Порядковые образы кватернионов будем обозначать как:

$$\mathcal{X}_{\beta\gamma}^{\alpha} = (\uparrow)^{\alpha} (\cup)_{\beta} (\mathcal{O})_{\gamma},$$

где α, β, γ – имеют тот же смысл.

В дальнейшем большую роль будет играть сокращенная форма:

$$\mathcal{X}_{\gamma}^{\alpha} = (\uparrow)^{\alpha} (\mathcal{O})_{\gamma}.$$

3) Приведенное соответствие на первый взгляд обладает свойством взаимной однозначности. В этом случае принцип двойственности просто бы констатировал полную симметрию между количеством и порядком и выбор того или иного аспекта числа был бы вопросом индивидуальных предпочтений. Однако оказывается, что структура порядкового образа фундаментальной цепочки «освежающе несхожа» со структурой оригинала. Выясним суть этой «несхожести».

Прежде всего, отметим, что признание порядковых чисел самостоятельными математическими объектами с необходимостью влечет требование к их инвариантности в том же смысле, в каком являются инвариантными количественные числа.

Заметим, что в рамках теоретико-множественной концепции подобная программа не возникает, поскольку порядковая составляющая числа определяется через его количественную составляющую.

Как показано в [8], предположение об инвариантности порядкового числа n_Z означает следующее. Все шаги процесса W_{T_Z} определяются некоторым началом отсчета. Чтобы сделать n_Z инвариантным, необходимо включить это начало отсчета в само число, то есть рассмотреть все возможные сочетания маркеров, «прикрепленных» к шагам процесса W_{T_Z} . В качестве таких маркеров традиционно выступают количественные числа $1, 2, 3, \dots$

Перестановка маркеров в положение $n, n-1, \dots, 1$ означает, что начало отсчета переместилось в противоположную сторону. Таким образом, идея инвариантности n_Z имманентно содержит в себе идею отрицательного числа (что, например, реализуется в модели Конвея).

Разумеется, все названные перестановки должны осуществляться одновременно (поскольку время едино) (рис. 5):

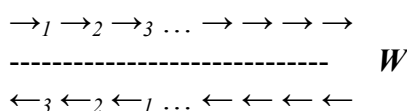


Рис. 5

Очевидно, что требование инвариантности n_Z приводит к тому, что цепочки отдельных шагов процесса W_{T_Z} замыкаются, образуя фундаментальные вращения, при этом возникают именно парные фундаментальные вращения. Чтобы подсчитать число образованных таким способом парных фундаментальных вращений, рассмотрим особый случай одного шага $\rightarrow$ процесса W_{T_Z} . В этом случае число 1_Z , разумеется, будет инвариантным в порядковом смысле. Однако из соображений общности к нему целесообразно добавить шаг с обратным направлением $\leftarrow$. Таким образом, конструкцию $\uparrow\downarrow$ (снова из соображения удобства стрелки пишутся вертикально) можно рассматривать как линейный шаг, направления которого определяются соглашением (забегая вперед, можно сказать, что эту конструкцию можно ото-

ждество с изотропным вектором). В случае натурального n , естественно, выбирается положительное направление.

Подсчет перестановок основан на фиксации различного числа линейных шагов. Тогда число $\lambda(n)$ парных фундаментальных вращений $\odot$, определяемых по формуле:

$$\begin{aligned} 0, & \text{ при } n=0, \\ \lambda(n) &= 0, \text{ при } n=1, \\ \lambda(n+1) &= \lambda(n)(n+1) + 1, n \geq 2. \end{aligned}$$

Будем считать также, что $\lambda(\omega) = \omega$, где ω – счетный ординал.

Это позволяет уточнить структуру чисел n_Z , добавив к $(\uparrow)^n \lambda(n)$ парных фундаментальных вращений, то есть $(\uparrow)^n$ переходит в $(\uparrow)^n (\odot)_{\lambda(n)}$.

Данный результат имеет интересное метафизическое следствие: всякое линейное движение, в котором можно выделить отдельные линейные шаги $\rightarrow \rightarrow \rightarrow \dots$, сопровождается появлением $\lambda(n)$ парных фундаментальных вращений, «привязанных» к каждому шагу (рис. 6):

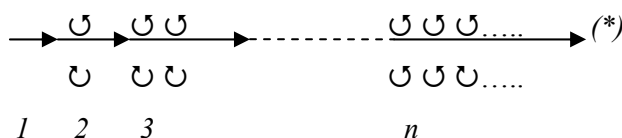


Рис. 6

4) Формула $n_Z = (\uparrow)^n (\odot)_{\lambda(n)}$ имеет крайне нетривиальные и очень существенные следствия.

Первое из них касается структуры порядкового двойника цепочки:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

Из инвариантного определения числа n_Z вытекает, что $\mathbb{N}^\sim$ непосредственно вложено в $\mathbb{H}^\sim$.

Однако, очевидно, что не всякая структура $(\uparrow)^\alpha (\odot)_\beta$, где α и β – количественные натуральные числа может быть отождествлена с каким-либо числом n_Z .

С другой стороны, очевидно, что $\mathbb{C}^\sim$ не вложено непосредственно в $\mathbb{H}^\sim$, поскольку порядковые образы комплексных чисел включают в себя простое фундаментальное вращение, в то время как порядковые образы кватернионов дополняются парными фундаментальными вращениями. Для осуществления этого вложения необходимо введение дополнительной (впрочем, очень простой) конструкции [6].

Наиболее радикальное различие порядковых и количественных чисел проявляется в структуре $\mathbb{R}^\sim$.

Согласно модели Конвея (которая, как уже подчеркивалось, идейно опирается на теорему 3), всякое действительное число (и даже нестандартное действительное число) можно представить различными цепочками (ко-

нечными и неограниченными) линейных шагов $\rightarrow$, $\leftarrow$. Опираясь на это представление, изобразим $\mathbb{R}^{\sim}$ в виде последовательности следующих блоков (рис. 7).

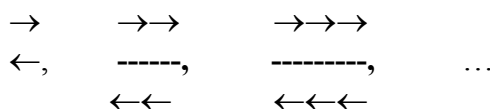


Рис. 7

Если предположить, что $\mathbb{R}^{\sim}$ должна включать в себя инвариантно определенные натуральные (и целые) числа то, оказывается, что порядковая структура $\mathbb{R}^{\sim}$ полностью (с точностью до соглашения о направлении линейных шагов и фундаментальных вращений) совпадает со структурой (*) последовательности инвариантно определенных натуральных чисел. Иными словами, действительные числа с точки зрения порядка не вносят ничего принципиально нового в структуру порядкового образа натурального ряда (при естественном условии порядковой инвариантности натуральных чисел).

Из этого утверждения вытекает ряд принципиальных следствий.

а) Из предположения порядковой инвариантности вытекает дискретность $\mathbb{R}^{\sim}$ в том смысле, что вся непрерывная в теоретико-множественном понимании совокупность элементов $\mathbb{R}^{\sim}$ разбивается на линейную последовательность шагов и сопровождающую ее совокупность парных фундаментальных вращений.

Фактически это означает, что фундаментальными элементами порядковых образов из цепочки: $N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ являются совокупности $\mathbb{C}^{\sim}$ и $\mathbb{H}^{\sim}$, определяемые двумя различными типами фундаментальных вращений. Более того, при определенных условиях эти совокупности могут быть сведены друг к другу [6].

Таким образом, в порядковом смысле имеются только порядковые образы комплексных чисел и кватернионов, из которых могут быть построены порядковые образы всех остальных чисел.

б) Полученная конструкция $\mathbb{R}^{\sim}$ – порядкового образа континуума действительных чисел дает ответ на поставленный ранее вопрос о характере движения континуума. Это линейное движение в рамках натурального ряда, которое сопровождается увеличивающимся числом парных фундаментальных вращений, прикрепленных к каждому шагу. Такая модель континуума проясняет источник апорий Зенона – неправомерное отождествление $\mathbb{R}^{\sim}$ и $\mathbb{R}$.

в) Структура порядкового образа континуума $\mathbb{R}^{\sim}$ существенно меняет философию дискретности. Традиционно дискретное находится «ступенью ниже» непрерывного. В этом контексте теоретико-множественная, количественная бесконечность видится основным инструментом построения моде-

ли непрерывного (это, собственно говоря, и является основным мотивом ее введения).

Порядковая бесконечность в определенном смысле является более сильной бесконечностью, чем бесконечность теоретико-множественная. Она позволяет «свернуть» теоретико-множественную модель непрерывного в приведенную выше структуру, состоящую из линейных шагов и парных фундаментальных вращений.

В результате образуется некоторая новая дискретность, которая не предшествует теоретико-множественной непрерывности, а *следует за ней*.

г) Обрисованная выше ситуация, с одной стороны, видится альтернативной: выбор типа инвариантности n_Z (количественной или порядковой) определяется волевым фактором. Однако если вспомнить следствие теоремы 4 о том, что континуум представляет собой переменную величину, альтернативность исчезает: инвариантность n_Z может быть только порядковой (что, разумеется, соответствует общему принципу двойственности).

д) Понятия количественной и порядковой инвариантности числа n_Z проецируются на различные модели времени: *геометрическое* время и время как *параметр* физических процессов (это время условно можно назвать бергсоновским).

В рамках количественной инвариантности две различные цепочки линейных шагов дают два различных числа. Это приводит к понятию *геометрического* времени, то есть времени, моделируемого с помощью теоретико-множественного континуума.

С точки зрения порядковой инвариантности линейные цепочки свертываются, образуя структуру (*), состоящую из линейных шагов и фундаментальных вращений. Это, в свою очередь, приводит к дискретизации континуума и появлению *феномена квантования*.

е) Дополнительную «интригу» добавляют следующие свойства фундаментальных вращений: $\odot + \uparrow\downarrow = \odot$

$$\cup + \uparrow = \cup$$

Шаг $\uparrow\downarrow$ можно мыслить как период фундаментального вращения $\odot$, а шаг $\uparrow$ как период фундаментального вращения $\cup$ (это следует из самого определения фундаментального вращения). Можно показать [7], что, добавив к фундаментальному вращению $\odot$ его полупериод $\uparrow$, можно получить обратное фундаментальное вращение $\odot + \uparrow = \odot$. Это значит, что фундаментальное вращение $\odot$ представляет собой *абстрактную модель спина*.

Вспоминая структуру (*), можно уточнить, что натуральным числам соответствуют не просто некоторые структуры, состоящие из парных фундаментальных вращений, но абстрактные модели спина. Это позволяет предположить, что квантовая механика «спрятана» внутри порядковой составляющей натурального ряда.

ж) Появление структур квантовой теории «из ничего» (из «стрелок» и «кругов») может вызвать недоумение. Однако, как это ни парадоксально,

дело именно в «стрелках» и «кругах», а традиционная теоретико-множественная модель – это трудный путь их моделирования. В самом общем виде проиллюстрируем сказанное.

В рамках геометрической (множественной) концепции вращение моделируется с помощью непрерывных групп преобразований. Отсюда вытекает необходимость непрерывной среды – континуума. С другой стороны, абстрактный характер вращения («вращения точки») потребовал введения новой конструкции – расслоенного пространства, «прикрепленного» к каждой точке континуума. Далее, по необходимости, вводится связность, соединяющая слои и т.д.

Порядковая бесконечность позволяет ввести фундаментальное, абстрактное вращение сразу, без промежуточных конструкций, в частности, континуума. Более того, опираясь на расширенную модель Конвея, можно структурно (с помощью «стрелок» и «кругов») представлять физические параметры вращения (например, $\mathcal{U}$ соотносится с числом $\frac{1}{2}$). В этом случае всю перечисленную выше множественную технику можно рассматривать как «строительные леса», необходимые для геометрического, множественного, представления фундаментального вращения.

Некоторые выводы

Как мы видим, переход к порядковой составляющей числа и введение порядковой инвариантности (инвариантности n_Z) приводит к появлению следующих нетривиальных утверждений:

– порядковый образ цепочки $N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ в определенном смысле **оборачивается**: $N \rightsquigarrow \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{H}$, то есть основополагающим понятием становится не порядковый образ натурального числа, а порядковый образ кватерниона. Порядковый образ натурального ряда является последовательностью порядковых образов кватернионов;

– порядковый образ $\mathbb{R}$ оказывается дискретным, при этом дискретность, если так можно выразиться, является дискретностью «более высокого порядка», чем теоретико-множественная непрерывность. Примечательным фактом является то, что дискретность $\mathbb{R}$ возникает вместе с возникновением порядкового образа кватернионов, что предопределяет роль кватернионов (и комплексных чисел) в квантовой теории;

– порядковый образ $\mathbb{R}$ является дискретной структурой, которая с точностью до соглашения о направлении линейных шагов и фундаментальных вращений совпадает со структурой инвариантного порядкового образа натурального ряда;

– если возникшие порядковые образы кватернионных структур наделить адекватным физическим содержанием, то приведенные выше утверждения позволяют предположить, что само существование континуума и его свойства определяются физическими процессами;

– принципиальное различие порядковой и количественной инвариантности, при условии, что за порядковой инвариантностью стоят реальные квантово-механические процессы, как нам представляется, делает принципиально невозможным строгую интеграцию квантовой теории и общей теории относительности и эта невозможность приобретает форму теоремы.

Стоит упомянуть об одном важном моменте, который остался за рамками данной статьи.

Дискретные, «стрелочно-круговые» структуры допускают реализацию на классическом компьютере, что может внести некоторую ясность в перспективность собственно «квантовых вычислений». Разумеется, эта тема требует отдельного развернутого обсуждения.

Возвращаясь к началу статьи, можно отметить, что порядковые образы комплексных чисел позволяют понять некоторые особенности «комплексного Мира» Р. Пенроуза.

Как показано в статье, комплексные числа, как и остальные числа, двойственны и представляют собой пару: ⟨точка плоскости, фундаментальное вращение⟩. Более сложная конструкция выглядит так: ⟨геометрическая конструкция, $\hat{O}_\gamma$ ⟩, где предполагается, что парное фундаментальное вращение $\hat{O}$ представлено через простые фундаментальные вращения $\hat{U}$.

Посмотрим на связь фундаментальной конструкции Пенроуза со второй из названных пар. Как известно, комплексный Мир Пенроуза базируется на расслоенном пространстве $\mathcal{M}$, где базой является пространство Минковского, а слоями комплексные проективные прямые CP^1 . Комплексная проективная прямая CP^1 мыслится Пенроузом как геометрическое описание спина, что позволяет встроить его и само пространство $\mathcal{M}$ в более сложную геометрическую конструкцию – пространство твистеров. Разумеется, такое встраивание возможно, если представить физическую сущность спина адекватной абстрактной конструкцией. В подходе Пенроуза это сделано на основе проективной прямой CP , то есть первого компонента второй из приведенных выше пар. С другой стороны, это можно принципиально можно сделать и на основе второго компонента этой пары – абстрактной динамической конструкции $\hat{O}_\gamma$. Вполне возможно, это позволит лучше понять идеи Пенроуза, заложенные в его твистерной программе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пенроуз Р. Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной. М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2007.
2. Владимиров Ю.С. Основания физики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.
3. Ефремов А.П. Метафизика кватернионной математики. – М.: РУДН. URL: <http://www.cosmology.su/file.php?id=260>
4. Векиенов С.А. Является ли «множество действительных чисел» множеством? // Вестник ТГУ. Сер. Естественные и технические науки. – 2000. – Т. 5. – Вып. 5. – С. 519–535.
5. Векиенов С.А. Математика и физика пространственно-временного континуума / Основания физики и геометрии. – М.: Российский университет дружбы народов, 2008. – С. 89–118.

6. Векшенов С.А. Метафизика двойственности / Метафизика век XXI. – Вып. 4. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – С. 90–114.
7. Бешенков А.С. Множество и процесс: «нераздельно и неслиянно» // Вопросы современной науки и практики. Вестник университета им. В. И. Вернадского. – 2011. – № 4 (35). – С. 58–62.
8. Векшенов С. А. Метафизика инвариантности // Метафизика. – 2012. – № 2. – С. 50–59; № 3. – С. 115–119.
9. Бешенков А.С. О новом подходе к определению множества действительных чисел и его применению к задаче измерения // Вопросы современной науки и практики. Вестник университета им. В.И. Вернадского. – 2012. – № 3 (41). – С. 23–28.

SEQUENTIAL IMAGES OF COMPLEX NUMBERS AND QUATERNIONS IN THE FOUNDATIONS OF PHYSICS

S.A. Vekshenov, A.S. Beshenkov

Russian Academy of Education

The article examines the sequential image of the fundamental chain of numbers $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \subset H$. It is demonstrated that underlying this chain is a sequential image of quaternions, whereas natural numbers, on the contrary, are a structure built on sequential images of quaternions. This, in particular, opens up a possibility of building a continuum determined by physical processes.

Key words: duality principle, ordinal infinity, fundamental rotation, ordinal image.