

---

# МЕТАФИЗИКА И ЗАГАДОЧНЫЕ ФЕНОМЕНЫ В БИОЛОГИИ, БИОФИЗИКЕ И ПСИХИКЕ ЧЕЛОВЕКА

---

## ГЕНЕТИЧЕСКИЙ КОД И ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ МАТРИЧНОГО ГЕНОТИПА

С.В. Петухов

*Институт машиноведения РАН*

Представлены результаты исследования помехоустойчивой системы молекулярно-генетического кодирования на основе применения матричных методов инженерной теории помехоустойчивого кодирования. Эти результаты выявляют связи между генетической системой и формализмами данной теории. Отмечается важная роль косых (не ортогональных) проекционных операторов и их суперпозиций в матричных представлениях феноменов молекулярно-генетических ансамблей, а также в моделировании наследуемых процессов и образований. Описываются возникающие на основе этих суперпозиций системы многомерных чисел или матричных операторов, кратко именуемые «тензорчислами» («тензоркомплексные», «тензордвойные» и др.). Высказывается гипотеза о том, что многие трудности математической биологии обусловлены неадекватностью для живой материи применяемых числовых систем. Обсуждается развитие генетической биомеханики, учитывающей зависимость наследуемых физиологических структур от структурных закономерностей генетического кодирования. Система генетического кодирования, общая в своих молекулярных основах для всех живых организмов, своими алгебраическими свойствами подсказывает новый – алгебраический – путь познания живой материи, связанный с проекционными операторами и многомерными числами. Живая материя, передающая наследственную информацию по цепи поколений, предстает информационной сущностью, глубоко алгебраичной по своей природе.

**Ключевые слова:** генетические алфавиты, проекционные операторы, тензорное умножение матриц, матричная генетика, функции Радемахера, функции Уолша, матрицы Адамара, циклические группы, генетическая биомеханика, тензоркомплексные числа.

## Введение

Достижения молекулярной генетики и биоинформатики привели к новому пониманию самой жизни: *«Жизнь есть партнерство между генами и математикой»* [Stewart, 1999]. Но какая математика может быть партнером помехоустойчивой системы генетического кодирования? В попытках найти ответ на этот фундаментальный вопрос автор использовал известные матричные формализмы инженерной теории помехоустойчивого кодирования. При этом были выявлены естественные сопряжения феноменологии генетического кодирования с рядом данных формализмов: ортогональными системами функций Радемахера и Уолша; матрицами Адамара; проекционными операторами; гиперкомплексными числовыми системами, включая кватернионы Гамильтона, и др. (см., например: [2–5], а также сайт автора: <http://petoukhov.com/>). Данные результаты представляются особо интересными в свете закона Менделя независимого наследования признаков: информация из микромира генетических молекул диктует конструкцию в макромире живых организмов, несмотря на сильные шумы и помехи, сразу по многим независимым каналам (например, цвет волос, кожи и глаз наследуется независимо друг от друга). Этот диктат осуществляется посредством неизвестных алгоритмов многоканального помехоустойчивого кодирования. Следовательно, каждый организм представляет собой алгоритмическую машину многоканального помехоустойчивого кодирования. Для познания этой генетической машины целесообразно использовать теорию помехоустойчивого кодирования, базирующуюся на матричных методах. Развиваемые нами исследования этого направления объединены под условным названием – *«матричная генетика»*, которая изучает матричные формы представления и моделирования ансамблей элементов генетической системы, а также других генетически наследуемых физиологических структур.

Наше зрительное восприятие построено на проецировании внешних объектов на сетчатку глаза. Но организм един, и данная статья показывает, что значение операторов проецирования для живого не исчерпывается этим и что оно фундаментально для биоинформатики вообще. В математике операции проецирования выражаются квадратными матрицами, которые называются «проекционными операторами» или кратко «проекторами» (альтернативное название – идемпотенты). Необходимое и достаточное условие того, что матрица  $P$  является проектором, дается критерием:  $P^2 = P$ . Многие «генетические» матрицы в этой статье будут удовлетворять этому критерию.

Проекционные операторы широко используются в физике (включая квантовую механику), химии, математике, информатике, логике. При этом практически всегда используются ортогональные проекторы, выражаемые симметрическими матрицами. Теория и приложения косых проекторов, которые выражаются несимметрическими матрицами, представлены весьма слабо. Но именно косые проекторы оказываются важными для отображения феноменологических свойств системы генетического кода и служат основой

нового класса моделей генетически наследуемых феноменов, включая ансамбли циклических биопроцессов и структур.

Все наследуемые физиологические системы организма согласованы с генетическим кодированием для их кодовой передачи потомкам и несут на себе печать его особенностей («генетическая биомеханика»). Поэтому та математика, которая окажется партнером генетического кода, должна оказаться полезной также для моделирования наследуемых физиологических структур, например, циклических процессов и филлотаксисных паттернов.

**1. Матричные представления генетических алфавитов и проекторы.** Молекулы наследственности ДНК и РНК содержат вдоль своих нитей кодовую последовательность четырех азотистых оснований – четырех «букв» одного из генетических алфавитов: аденина А, цитозина С, гуанина G, тимина Т (или родственного ему урацила U в РНК). Помехоустойчивый генетический код кодирует последовательности 20 видов аминокислот в цепевидных белках с помощью 64 триплетов – «трехбуквенных слов», представляющих собой всевозможные комбинации из этих четырех букв типа CAG, ACC, ... .

Система генетического кодирования базируется на наборах (алфавитах) n-плетов: 1) наборе  $4^1$  моноплетов (A, C, G, T/U); 2) наборе  $4^2=16$  дуплетов (AA, AC, AG,...); 3) наборе  $4^3=64$  триплетов (AAA, AAC, ACA, ...) и т.д. Каждый полный алфавит n-плетов, состоящий из  $4^n$  членов, представляется соответствующей квадратной матрицей из тензорного (или кронекеровского) семейства матриц  $[C U; A G]^{(n)}$ , где (n) – тензорная (или кронекеровская) степень. На рис. 1 показаны первые три генетические матрицы этого семейства в алфавите РНК для 4 нуклеотидов, 16 дуплетов и 64 триплетов, расположенных в них строго упорядоченным образом.

C	U
A	G

 $[C U; A G]^{(2)} =$ 

CC	CU	UC	UU
CA	CG	UA	UG
AC	AU	GC	GU
AA	AG	GA	GG

  
  
 $[C U; A G]^{(3)} =$ 

CCC	CCU	CUC	CUU	UCC	UCU	UUC	UUU
CCA	CCG	CUA	CUG	UCA	UCG	UUA	UUG
CAC	CAU	CGC	CGU	UAC	UAU	UGC	UGU
CAA	CAG	CGA	CGG	UAA	UAG	UGA	UGG
ACC	ACU	AUC	AUU	GCC	GCU	GUC	GUU
ACA	ACG	AUA	AUG	GCA	GCG	GUA	GUG
AAC	AAU	AGC	AGU	GAC	GAU	GGC	GGU
AAA	AAG	AGA	AGG	GAA	GAG	GGA	GGG

Рис. 1. Три первых представителя тензорного семейства алфавитных матриц  $[C U; A G]^{(n)}$ , где (n) обозначает тензорную степень. Серым цветом выделены 8 сильных дуплетов в матрице и 32 триплета с сильными корнями

Первые две позиции в триплетях называются корнями триплетов. Природа почему-то поделила все множество 64 триплетов на два равных – «черное» и «белое» – подмножества по 32 триплетя в каждом: «триплеты с сильными корнями» и «триплеты со слабыми корнями». Эти два подмножества существенно отличаются друг от друга по кодовым свойствам содержащихся в них триплетов: кодирование вида аминокислот триплетями с сильными корнями не зависит от вида нуклеотида на третьей позиции, а у триплетов с сильными корнями зависит (см. подробности: [2; 3; 6]).

Существует ли симметрия в расположении триплетов с сильными и слабыми корнями в матрице триплетов  $[C U; A G]^{(3)}$ , которая была построена совершенно формально без упоминания аминокислот и кодовых значений триплетов? Заметим, что имеется огромное количество  $64! \approx 10^{89}$  вариантов расположения 64 триплетов в  $(8 \times 8)$ -матрице. Для сравнения физика оценивает все время существования Вселенной в  $10^{17}$  секунд. Очевидно, что случайное расположение 20 кодируемых аминокислот и соответствующих триплетов в  $(8 \times 8)$ -матрице почти никогда не даст симметрии в ее половинах, квадрантах и строках. Но неожиданно феноменологическое расположение 32 триплетов с сильными корнями и 32 триплетов со слабыми корнями имеет в этой матрице симметрический характер, как и расположение соответствующих 8 сильных и 8 слабых дуплетов в  $(4 \times 4)$ -геноматрице  $[C U; A G]^{(2)}$  (см. рис. 1):

- 1) оба квадранта вдоль каждой диагонали тождественны по мозаике;
- 2) верхняя и нижняя половины в каждой матрице зеркально-антисимметричны друг другу по цвету;
- 3) смена черных и белых ячеек в каждом столбце соответствует нечетной меандровой функции.

Какие же математические секреты живой материи отражаются в этих мозаичных геноматрицах дуплетов и триплетов? Наиболее важным фактом оказывается соответствие мозаик каждого столбца в них нечетным меандровым функциям, известным в теории обработки сигналов под именем «функций Радемахера» ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Функция\\_Радемахера](http://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Радемахера)). Эти функции содержат только элементы “+1” и “-1”. Каждый из матричных столбцов представляет функцию Радемахера, если черные и белые дуплеты и триплеты интерпретировать соответственно как элементы “+1” и “-1”. Соответствующие радемахеровские формы представления геноматриц дуплетов и триплетов  $[C U; A G]^{(2)}$  и  $[C U; A G]^{(3)}$  имеют вид матриц  $R_4$  и  $R_8$  (рис. 2).

Системы функций Радемахера тесно связаны с полными ортогональными системами функций Уолша, представленных в столбцах и строках  $(2^N \times 2^N)$ -матриц Адамара (см., например: [7–9]). Генетические алфавиты устроены природой так, что радемахеровские геноматрицы оказываются связанными с геноматрицами Адамара (а их функции Радемахера с соответствующими функциями Уолша) простым алгоритмом, основанным на объек-

тивных свойствах молекулярно-генетической системы. В четырехбуквенном алфавите ДНК (А, С, G, Т) и алфавите РНК (А, С, G, U) родственные нуклеотиды Т и U существенно отличаются от других трех букв этих генетических алфавитов: 1) только эти буквы взаимно заменяются при переходе от ДНК к РНК и обратно; 2) только эти буквы не содержат в своем молекулярном составе важной функциональной аминогруппы NH<sub>2</sub>. Учитывая это, имеются объективные основания для следующего алгоритма: всякий раз, когда в черно-белых геноматрицах [C U; A G]<sup>(2)</sup> и [C U; A G]<sup>(3)</sup> (см. рис. 1) буква U оказывается на нечетной позиции в дуплете или триплете, цвет этого дуплета или триплета должен измениться на противоположный. Применение этого алгоритма порождает новые черно-белые символьные геноматрицы, мозаика которых совпадает с мозаикой матриц Адамара (рис. 3, сверху). По определению, матрицей Адамара H называется квадратная матрица порядка n, элементами которой являются только числа «+1» и «-1» и для которой выполняется соотношение  $H \cdot H^{TP} = n \cdot E_n$ , где H<sup>TP</sup> – транспонированная матрица, E<sub>n</sub> – единичная матрица того же порядка. На рис. 3 внизу показаны числовые геноматрицы Адамара H<sub>4</sub> и H<sub>8</sub>, которые представляют символьные геноматрицы [C U; A G]<sup>(2)</sup> и [C U; A G]<sup>(3)</sup> с их алгоритмически измененной мозаикой и являются результатом замены черных и белых символьных элементов на числа «+1» и «-1» соответственно.

$$R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; R_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Радемахеровские представления R<sub>4</sub> и R<sub>8</sub> геноматриц дуплетов и триплетов [C U; A G]<sup>(2)</sup> и [C U; A G]<sup>(3)</sup> из рис. 1

Матрицы Адамара – важнейший инструмент в цифровой информатике и связи (для помехоустойчивости, сжатия информации и многого другого), статистике и многих других областях (см., например, обзор [Seberry, 2005]). Так, помехоустойчивые коды на основе матриц Адамара использовались на космических кораблях «Маринер» и «Вояджер», что позволило получить качественные фотографии Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна, несмотря на искаженность и ослабленность проходящих сигналов. Матрицы Адамара используются для создания квантовых компьютеров, которые базируются на «гейтах Адамара». Они применяются в квантовой механике в форме унитарных операторов. А теперь специальный класс матриц Адамара

выявляется и изучается в связи с помехоустойчивым генетическим кодированием.

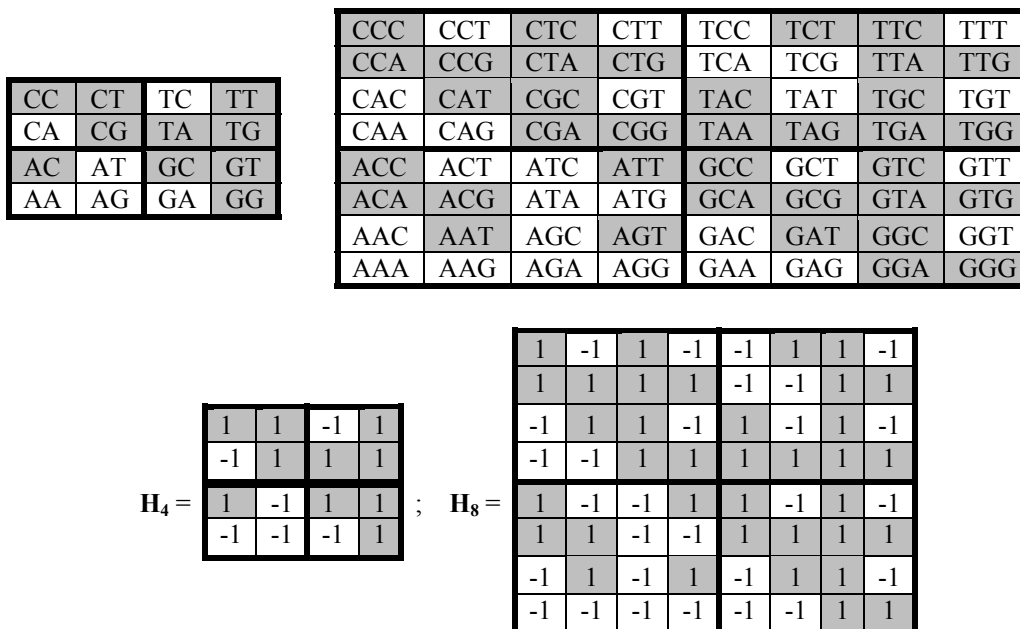


Рис. 3. Вверху: геноматрицы дуплетов и триплетов  $[C U; A G]^{(2)}$  и  $[C U; A G]^{(3)}$  с алгоритмически измененной черно-белой мозаикой. Внизу: адамаровы представления  $\mathbf{H}_4$  и  $\mathbf{H}_8$  этих геноматриц

Декомпозиция этих геноматриц  $\mathbf{H}_4$ ,  $\mathbf{H}_8$ ,  $\mathbf{R}_4$ ,  $\mathbf{R}_8$  (см. рис. 2, 3) дает интересные результаты, выводящие на модели генетической биомеханики и оригинальные системы многомерных чисел или операторов. Из-за лимитированного объема статьи мы проиллюстрируем эти результаты описанием декомпозиций только адамаровых матриц  $\mathbf{H}_4$ ,  $\mathbf{H}_8$ , отметив, что декомпозиции радемахеровских матриц  $\mathbf{R}_4$  и  $\mathbf{R}_8$  дают во многом схожие материалы (расширенное математическое описание имеется в статьях [4; 5]).

На рис. 4 представлены адамаровы геноматрицы  $\mathbf{H}_4$  и  $\mathbf{H}_8$ , в виде суммы разреженных матриц, в каждой из которых сохранен только один столбец из исходной матрицы, а остальные столбцы являются нулевыми. Такой тип декомпозиции будем называть «столбцовым».

Математическим фактом является то, что каждая из 12 разреженных матриц на рис. 3 является косым проекционным оператором, поскольку она удовлетворяет критерию  $P^2 = P$  и является несимметрической. Тем самым генетические матрицы  $\mathbf{H}_4$  и  $\mathbf{H}_8$  являются суммами косых проекторов; генетическая система сопряжена с косыми проекторами. Дополнительно отметим, что аналогичная столбцовая декомпозиция радемахеровских геноматриц  $\mathbf{R}_4$  и  $\mathbf{R}_8$  (см. рис. 2) дает 12 других разреженных матриц, которые также являются проекторами и используются нами для моделирования в генетической биомеханике.

## 2. Наследуемые ансамбли биологических циклов

Живой организм представляет собой огромный ансамбль взаимно согласованных циклических процессов, наследуемых из поколения в поколение. Даже каждый белок вовлечен в цикл «рождение-смерть», поскольку через небольшое время он распадается на составляющие его аминокислоты, а затем собирается вновь. Согласно хрономедицине и биоритмологии, различные заболевания связаны именно с нарушениями (диссинхронизмом) в кооперативных ансамблях биоциклов организма. Известно, что математические циклические группы преобразований полезны для моделирования циклических процессов. Но комбинации многих из названных генетических проекторов как раз и порождают множество взаимно связанных циклических групп. Проиллюстрируем это на примере проекторов из столбцовой декомпозиции адамаровой (4x4)-матрицы  $\mathbf{H}_4 = h_0+h_1+h_2+h_3$  (рис. 4). Расширенное изложение и примеры для разных геноматриц приведены в статье [5].

$$\mathbf{H}_4 = h_0+h_1+h_2+h_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
  

$$\mathbf{H}_8 = u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+u_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Рис. 4. Столбцовая декомпозиция адамаровых геноматриц  $\mathbf{H}_4$  и  $\mathbf{H}_8$  из рис. 3, при которой каждая из разреженных матриц является косым проектором

Рассмотрим сумму генопроекторов  $h_0$  и  $h_2$  (рис. 5).

$$h_0+h_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Рис. 5. Сумма генопроекторов  $h_0$  и  $h_2$  из декомпозиции матрицы  $H_4$  из рис. 4

Эта сумма  $h_0+h_2$ , взятая с весовым коэффициентом  $2^{-0.5}$ , при ее возведении в степень дает циклическую группу с периодом 8:

$$(2^{-0.5}*(h_0+h_2))^N = (2^{-0.5}*(h_0+h_2))^{N+8} \text{ (здесь } N=1, 2, 3, \dots).$$

Итеративное действие справа этого оператора  $Y=(2^{-0.5}*(h_0+h_2))$  на произвольный 4-мерный вектор  $X=[x_0, x_1, x_2, x_3]$  порождает циклический набор векторов  $X*Y^N$ , в котором только две координаты с соответствующими индексами **0** и **2** циклически изменяются, а все остальные координаты равны нулю.

Таким образом, данная циклическая группа операторов позволяет осуществлять избирательное управление (или кодирование) циклических изменений векторов в плоскости  $(x_0, x_2)$  4-мерного векторного пространства  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Сумма двух других генопроекторов  $h_1+h_3$  из декомпозиции матрицы  $H_4$  на рис. 4 приводит аналогичным образом к другой циклической группе с периодом 8, которая позволяет осуществлять избирательное управление циклических изменений векторов в другой плоскости  $(x_1, x_3)$  того же 4-мерного пространства. Если рассматривать суммы пар ряда проекторов из столбцовой декомпозиции адамаровой  $(8 \times 8)$ -геноматрицы  $H_8$  (рис. 4), то возникают другие циклические группы с периодом 8 и аналогичными свойствами селективного управления циклическим изменением векторов в соответствующих плоскостях уже 8-мерного пространства. Использование в показателях циклических операторов дробных степеней  $N/m$ , где  $N$  и  $m$  целые числа, дает возможность циклических трансформаций векторов  $X*Y^{N/m}$  со сколь угодно малой дискретностью (то есть плавностью) перехода от одного вектора к последующему.

Адамаровы геноматрицы  $H_4$  и  $H_8$  взаимно связаны соотношением  $H_8 = H_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]$ , где  $\otimes$  – символ тензорного умножения, а  $[1 \ -1; \ 1 \ 1]$  – матричное представление комплексного числа с единичными координатами. Расширение этого выражения в виде  $H_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]^{(N)}$ , где  $(N)$  – целая положительная тензорная степень, приводит к таким  $(2^N \times 2^N)$ -матрицам, которые представляют собой сумму столбцовых  $(2^N \times 2^N)$ -проекторов. Среди попарных сумм этих новых проекторов встречается множество таких, которые аналогичным образом определяют новые циклические группы преобразований с периодом 8 и свойством избирательного управления циклическим изменением векторов в соответствующих плоскостях  $2^N$ -мерного пространства. Данный алгоритмический путь позволяет получить как угодно много



взаимно связанных циклических групп операторов, сопряженных с генетическим кодированием и обладающих свойством селективного управления циклической векторов в подпространствах пространств сколь угодно большой мерности.

Это множество циклических групп может использоваться для моделирования сколь угодно больших ансамблей генетически наследуемых циклических процессов в живых организмах. В частности, эти циклические группы используются в лаборатории автора для моделирования различных походок животных и человека: задавая разные периоды циклов и разные фазовые сдвиги для отдельных звеньев тела, мы получаем множество вариантов нормальных и аномальных походок. Многие походки, которые построены на циклических движениях конечностей и соответствующих мышечных приводов, очевидным образом носят генетически наследуемый характер. Так, вылупившиеся из яиц черепашки и крокодильчики вполне координированно ползут к воде без всякого стороннего обучения; новорожденный жеребенок, немного окрепнув, начинает самостоятельно ходить и бегать; многоножки ползают, согласованно передвигая на основе врожденных алгоритмов управления множество ног (их количество иногда доходит до 750). Подчеркнем, что прежде походки и алгоритмы локомоций изучались в биомеханике движений вне всякой связи с генетическим кодированием и наследованием унифицированных алгоритмов управления (см., например, классическую книгу по биомеханике движений Н.А. Бернштейна [11]). Операция проецирования ассоциируется со многими видами движений и планируемых действий нашего тела, направленных на достижение цели по кратчайшему пути: например, посылая бильярдный шар в цель, мы используем операцию проецирования; ударяя пальцем по клавише компьютера или фортепиано, мы совершаем проецирующее действие и т.п. Другими словами, понятие проекционного оператора может использоваться для моделирования обширного класса подобных биомеханических действий.

Тематика генетически наследуемой способности к координированному движению частей тела имеет отношение к проблеме врожденных знаний об окружающем пространстве и проблеме физиологических оснований геометрии. Уже давно различными исследователями выдвигались идеи о важном значении кинематической организации тела и его движений в генезисе пространственных представлений у индивидуума. В частности, эти идеи развивались Г. Гельмгольцем и И.М. Сеченовым. Они же положены А. Пуанкаре в фундамент его учения о физиологических основаниях геометрии и о происхождении у индивидуума пространственных представлений.

Согласно Пуанкаре, само понятие пространства и геометрии возникает у индивидуума на основе деятельности кинематической организации тела, включающей внутреннюю рецепторику для характеристики положения и движений частей тела относительно друг друга, то есть в кинематической организации тела есть нечто, предшествующее понятию пространства [12. С. 58–59]. При этом особенности всего аппарата кинематической деятельно-

сти организма приведены эволюционным развитием жизни в соответствие с реалиями окружающего физического мира. Благодаря этому каждый новорожденный организм овладевает адекватными пространственными представлениями не только за счет персонального контакта в ходе онтогенеза с предметами окружающего мира, но и за счет благоприобретений предыдущих поколений, закрепленных в ходе филогенеза в аппарате движений тела [13. С. 82–92]. По мнению Пуанкаре, для существа вполне неподвижного не было бы ни пространства, ни геометрии [12. С. 57]. *«Локализовать предмет, – писал он, – значит просто представить себе те движения, которые нужно было бы сделать, чтобы достигнуть его»*, то есть представить себе *«те мускульные ощущения, которыми сопровождаются эти движения и которые не предполагают предшествования (! – С.П.) понятия пространства»* [12. С. 58]. *«Если бы у нас не было орудия для измерения, мы совершенно не могли бы построить пространство: но орудие у нас есть, и к нему мы относим все и пользуемся им инстинктивно; это наше собственное тело»* [12. С. 80]. Во времена Пуанкаре наука не знала о генетическом коде, но, с современной точки зрения, изложенные мысли Пуанкаре свидетельствуют в пользу значимости структурной организации генетической системы для физиологических оснований геометрии и врожденных представлений о пространстве. И они созвучны излагаемым в статье результатам матричной генетики.

Современная физиология вносит существенное дополнение в учение Пуанкаре о врожденной взаимосвязи тела и пространственных представлений, утверждая априорность представления индивидуума о своей телесной оболочке. Это утверждение обусловлено изучением так называемых фантомных ощущений у инвалидов: специфического чувства присутствия утраченной части тела. Установлено [14; 15], что фантомные ощущения имеют место не только у людей с ампутированными конечностями, но и у людей с врожденным отсутствием конечностей. Значит, представление индивидуума о схеме своего тела вовсе не обусловлено его жизненным опытом, а носит врожденный характер.

Отметим здесь, что, хотя понятие пространства является исходным для большинства физических теорий, возможно развитие содержательного учения в области теоретической физики, в котором оно выступает вторичным (!) понятием, выводимым из более первичных системно-числовых понятий дискретного характера. Речь идет, прежде всего, о бинарной геометрофизике [16], положения которой связаны с формализмами «теории физических структур» [17] и вызывают ассоциации со способностью животных организмов, исходно наделенных дискретной молекулярно-генетической информацией, овладевать пространством и адекватными движениями в нем на основе этой первичной информации. Интересно, что в бинарной геометрофизике важную роль играют матрицы с нулевыми детерминантами, которые во множестве представлены в исследованиях по матричной генетике, описываемых в данной статье. Это дает надежду на взаимное обогащение двух

данных научных направлений. Добавим, что принцип бинарности (типа мужское-женское или инь-ян) реализуется на всех уровнях биологической организации, включая двойную спираль ДНК с комплементарными основаниями и мышечное обеспечение движений, которое строится на парной работе мышц-сгибателей и мышц-разгибателей. Дополнительные материалы к теме врожденных пространственных представлений, включая концепцию Б. Рассела [18] о врожденности положений проективной геометрии для индивидуума, а также обзор работ Э. Шредингера и других исследователей по геометрии наследуемых пространств зрительного восприятия, можно найти в книге [19].

### **3. Андрогинные матрицы и гиперкомплексные числа в матричной генетике**

Согласно Платону, люди изначально были андрогинами – объединениями мужского и женского. Боги наказали их, разъединив, но половинки всю жизнь ищут друг друга. Задолго до Платона в Древнем Китае мужское и женское начала считались главными действующими лицами, причем сам мир был создан ими. Духовные учения Востока (Бхагават-гита, Веды и др.) утверждают, что душа при сотворении состояла из мужского и женского начал, отражая двойственную природу самого творца. Основатель аналитической психологии К. Юнг подразделял душу на мужское и женское начала, доли которых в разные периоды жизни изменяются (обзор этой темы дан в книге [2]).

В молекулярной генетике наблюдается много удивительных и трудно-объяснимых феноменов взаимного нахождения и притяжения двух молекулярных одновидовых партнеров с образованием новой пары, причем это происходит в среде из огромного множества других молекул. В качестве примера приведем нуклеосомные гистоны, которые являются важным белковым компонентом хромосом. Нити молекул ДНК в ядре эукариотической клетки намотаны на нуклеосомы, которые представляют собой октамерный стержень, состоящий из гистонов четырех типов: H2A, H2B, H3 и H4. Эта четверка типов разбита природой на пары одновидовых гистонов: гистоны H2A и H2B наделены важной для генетики способностью образовывать пары друг с другом и в этом смысле являются гистонами одного вида. Пары другого вида состоят из гистонов H3 и H4, которые также наделены способностью образовывать пары именно друг с другом (по аналогии с самцом и самкой одного вида у животных). В одну нуклеосому входят по два гистона каждого типа – всего восемь гистонов. На этот октамер, как нитка на катушку, наматывается ДНК, образуя левозакрученную суперспираль. Гистоны попарно (!) узнают и объединяются друг с другом, и все образование октамерного стержня строится на последовательном образовании пар из двух одновидовых молекулярных объектов (рис. 6). На первом шаге возникают пары (димеры) – одна пара H3-H4 и две H2A-H2B. На следующем шаге два

первых димера образуют парное объединение следующего уровня сложности – тетрамер из двух пар H3-H4. На третьем шаге этот тетрамер образует парное объединение еще более высокого уровня с двумя парами H2A-H2B, в результате чего возникает гистоновый октамер. Все эти поиски и совокупления одновидовых гистонов сначала в пары, а затем в пары из пар происходят в огромном столпотворении биомолекул множества других видов и их осколков, причем происходят, несмотря на эффекты зарядового экранирования и другие мешающие обстоятельства. Данные феномены из микромира молекул должны подчиняться принципам квантовой механики, но их вывод из этих известных принципов представляется для науки пока непосильной задачей. Подобные молекулярно-генетические факты дают основание подозревать, что феномены любви или любовного поиска парного партнера, наблюдающиеся на уровне целостных организмов у людей и животных, возникли не на пустом месте, а являются продолжением квантовомеханических явлений поиска парного одновидового партнера, реализуемым уже на уровне, по крайней мере, генетических молекул. Молекулярно-генетические феномены дают основания предполагать, что утверждение Платона о врожденном стремлении каждого человека найти свою вторую половину может быть перенесено в мир врожденных свойств генетических молекул (это подробнее обсуждается в книге [2]).

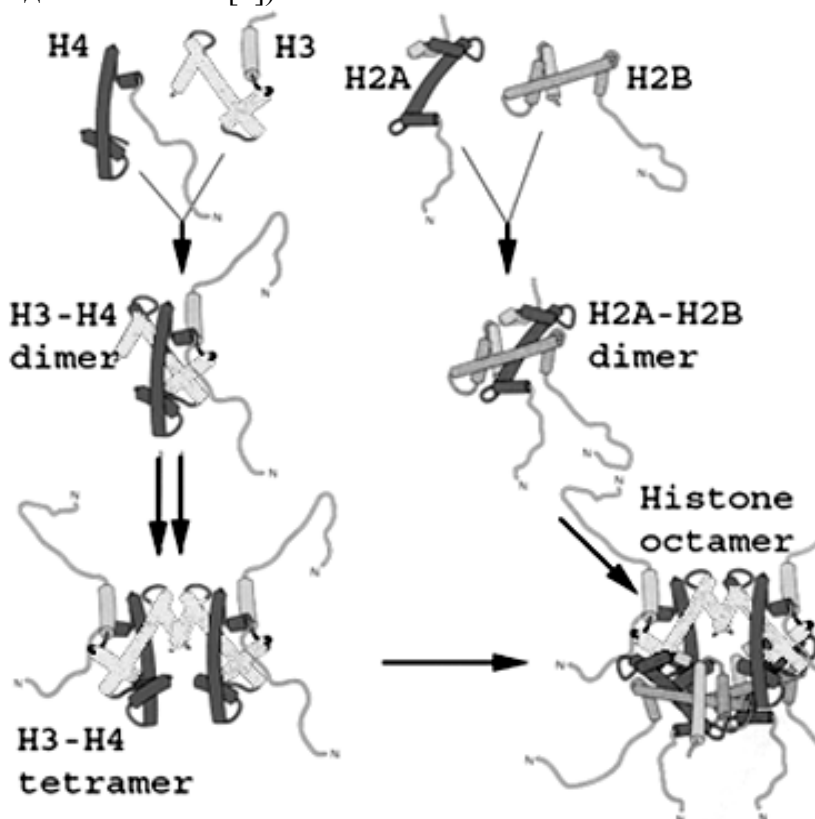


Рис. 6. Многоступенчатое парное объединение одновидовых гистонов H3-H4 и H2A-H2B в димеры, тетрамеры и октамеры

(взято из: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/bv.fcgi?rid=mboc4.figgrp.636>)

В данной связи интересно, что попарное суммирование генетических проекторов с четными и нечетными индексами порождает представителей более многомерных гиперкомплексных чисел (по аналогии с андрогинным соответствием), которые, попарно суммируясь, дают представителей еще более многомерных гиперкомплексных чисел и т.д. Образуется иерархия или дерево андрогинных матричных объектов. Остановимся на этом подробнее.

Адамаровы  $(4 \times 4)$ - и  $(8 \times 8)$ -матрицы  $\mathbf{H}_4$  и  $\mathbf{H}_8$  (рис. 3) и их  $(2^N \times 2^N)$ -матричные обобщения на основе указанного алгоритма  $\mathbf{H}_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  связаны с матричными представлениями комплексных чисел, а также их гиперкомплексных расширений [4; 5]. Проиллюстрируем это на примере уже рассмотренной на рис. 5 суммы  $h_0+h_2$  двух  $(4 \times 4)$ -проекторов из столбцовой декомпозиции матрицы  $\mathbf{H}_4$ . Матрица  $h_0+h_2$  может быть разложена на сумму двух других разреженных матриц  $e_0$  и  $e_2$ , показанных на рис. 7 вверху. Набор этих матриц  $e_0$  и  $e_2$  замкнут относительно умножения и определяет таблицу умножения, которая совпадает с известной таблицей умножения комплексных чисел. Аналогично сумма  $h_1+h_3$  двух других проекторов из столбцовой декомпозиции матрицы  $\mathbf{H}_4$  разлагается на сумму двух разреженных матриц  $e_1$  и  $e_3$  (рис. 7, нижний ряд). Набор этих матриц  $e_1$  и  $e_3$  замкнут относительно умножения и также определяет таблицу умножения комплексных чисел. Тем самым, с точки зрения данных декомпозиций, каждая из матричных сумм  $h_0+h_2$  и  $h_1+h_3$  является  $(4 \times 4)$ -матричным представлением комплексного числа с единичными координатами в 4-мерном пространстве.

$$\begin{array}{l}
 h_0+h_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = e_0+e_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{array}{|c|c|} \hline e_0 & e_2 \\ \hline e_0 & e_0 \\ \hline e_2 & e_2 \\ \hline \end{array} \\
 \\
 h_1+h_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e_1+e_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{array}{|c|c|} \hline e_1 & e_3 \\ \hline e_1 & e_1 \\ \hline e_3 & e_3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

**Рис. 7. Специальная декомпозиция суммы двух генопроекторов  $h_0+h_2$  и суммы двух генопроекторов  $h_1+h_3$  показывает, что каждая из этих сумм является комплексным числом с единичными координатами**

Здесь мы имеем простейший пример того, как сумма двух представителей алгебры низшего уровня (в данном случае алгебры проекторов) оказывается представителем алгебры более высокого уровня (в данном случае алгебры комплексных чисел). Подобные суммарные матрицы, представляющие объекты более высокого алгебраического уровня на основе суммы мат-

ричных представителей более низких алгебр, мы условно называем андрогинными. Рассмотрение множества генетических проекторов из столбцовых декомпозиций адамаровых геноматриц  $\mathbf{H}_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  (а также столбцовых декомпозиций радемахеровских геноматриц) дает множество других примеров андрогинных матриц, образующих иерархии или деревья с участием  $2^N$ -мерных гиперкомплексных чисел с единичными координатами, включая кватернионы и бикватернионы Гамильтона как суммы соответствующего количества генетических проекторов [5]. Например, в зависимости от типа декомпозиции, адамарова геноматрица  $\mathbf{H}_8$  представляет собой или сумму 16 столбцовых проекторов, или сумму 4 комплексных чисел с единичными координатами, или сумму 2 кватернионов Гамильтона с единичными координатами, или 1 бикватернион Гамильтона с единичными координатами. Все это сопряжено с формализмами секвентного анализа на функциях Уолша [9], имеющего обширные технологические применения и, согласно нашим исследованиям, особо перспективного для спектрального анализа наследуемых физиологических процессов и его приложений. Дополнительно автором показано, что всякое гиперкомплексное число, имеющее матричное представление и единичную вещественную часть (в этом случае главная диагональ матрицы заполнена только элементами +1), является суммой косых проекторов [5].

Рассмотрим подмножество  $(4 \times 4)$ -матриц  $C_{02} = a_0 * e_0 + a_2 * e_2$ , образованных на базе суперпозиции базисных элементов  $e_0$  и  $e_2$  из рис. 7 и вещественных коэффициентов  $a_0$ ,  $a_2$  (рис. 8). Оно не содержит обычной единичной матрицы с единицами на главной диагонали, но зато содержит ее замену  $e_0$ , которая выступает в роли единицы для этого подмножества. В этом подмножестве обратная матрица  $C_{02}^{-1}$  определяется через  $C_{02}^{-1} * C_{02} = C_{02} * C_{02}^{-1} = e_0$ . Выражение для обратной матрицы  $C_{02}^{-1}$  приведено на рис. 8 внизу. Матрица  $C_{02}$  является полноценным  $(4 \times 4)$ -матричным представлением комплексных чисел в плоскости 4-мерного пространства. Напомним, что обычно матричное представление комплексных чисел имеет вид  $(2 \times 2)$ -матрицы  $[x \ y; \ -y \ x]$ .

$$C_{02} = a_0 * e_0 + a_2 * e_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -a_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_2 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \hline -a_0 & 0 & a_2 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ \hline -a_2 & 0 & -a_0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$C_{02}^{-1} = (a_0^2 + a_2^2)^{-1} * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_0 & 0 & a_2 & 0 \\ \hline -a_0 & 0 & -a_2 & 0 \\ \hline -a_2 & 0 & a_0 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & -a_0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 8.  $(4 \times 4)$ -матричное представление  $C_{02} = a_0 * e_0 + a_2 * e_2$  комплексных чисел в 4-мерном пространстве. Внизу дано выражение для обратных к ним чисел  $C_{02}^{-1}$

Подмножество  $(4 \times 4)$ -матриц  $C_{13} = a_1 * e_1 + a_3 * e_3$ , образованных на базе суперпозиции базисных элементов  $e_1$  и  $e_3$  из рис. 7 и вещественных коэффициентов  $a_1, a_3$ , дает представление комплексных чисел в другой плоскости 4-мерного пространства (рис. 9). Оно также не содержит обычной единичной матрицы с единицами на главной диагонали, но зато содержит ее замену  $e_1$ , которая выступает в роли единицы для этого подмножества. В этом случае обратная матрица  $C_{13}^{-1}$  определяется через  $C_{13}^{-1} * C_{13} = C_{13} * C_{13}^{-1} = e_1$ . Выражение для обратной матрицы  $C_{13}^{-1}$  приведено на рис. 9 внизу.

Итеративное умножение каждого из этих  $(4 \times 4)$ -матричных операторов  $C_{02}$  и  $C_{13}$  справа на произвольный 4-мерный вектор  $X = [x_0, x_1, x_2, x_3]$  приводит к набору векторов  $Z_{0N} = X * C_{02}^N$  и  $Z_{1N} = X * C_{13}^N$ , спроецированных на плоскость  $[x_0, x_2]$  и на плоскость  $[x_1, x_3]$  соответственно, что позволяет говорить об избирательном управлении трансформацией векторов в этих плоскостях 4-мерного пространства. Концы данных векторов  $Z_{0N}$  и  $Z_{1N}$  расположены на логарифмических спиралях, принадлежащих этим двум плоскостям. Эта математика, алгоритмически расширяемая на случай  $2^N$ -мерных пространств, дает новые возможности моделирования известных феноменов спирального филлотаксиса, в том числе моделирования целых ансамблей филлотаксисных паттернов, воплощаемых в подпространствах многомерного конфигурационного пространства живого организма, например, ели со множеством ее филлотаксисных шишек (см. [5] и презентацию автора на конференции по биоинформатике в Белграде на сайте [http://www.tabis2013.ipb.ac.rs/TABIS2013\\_pdf\\_presentations/PETOUKHOV%20BELGRAD%202013%20dvtE dit.pdf](http://www.tabis2013.ipb.ac.rs/TABIS2013_pdf_presentations/PETOUKHOV%20BELGRAD%202013%20dvtE dit.pdf)).

$$C_{13} = a_1 * e_1 + a_3 * e_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & -0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & -a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & -a_3 & -0 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$C_{13}^{-1} = (a_1^2 + a_3^2)^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & -a_3 \\ 0 & a_1 & 0 & -a_3 \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 \end{bmatrix}$$

**Рис. 9.**  $(4 \times 4)$ -матричное представление  $C_{13} = a_1 * e_1 + a_3 * e_3$  комплексных чисел в 4-мерном пространстве. Внизу дано выражение для обратных к ним чисел  $C_{13}^{-1}$

Для всех привычно, что сумма двух комплексных чисел дает новое комплексное число и что произведение двух комплексных чисел коммутативно. Это верно, если комплексные числа принадлежат к одной плоскости. Но для случая двух представленных на рис. 8 и 9 комплексных чисел  $C_{02}$  и  $C_{13}$ , относящихся к разным плоскостям 4-мерного пространства, ситуация кардинально иная. Их произведение некоммутативно (рис. 10).

$$C_{02} * C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & a_0 * a_1 + a_2 * a_3 & 0 & a_0 * a_3 - a_1 * a_2 \\ 0 & -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 & 0 & a_1 * a_2 - a_0 * a_3 \\ 0 & a_1 * a_2 - a_0 * a_3 & 0 & a_0 * a_1 + a_2 * a_3 \\ 0 & a_0 * a_3 - a_1 * a_2 & 0 & -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 \end{bmatrix}$$

$$; C_{13} * C_{02} = \begin{bmatrix} -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 & 0 & a_1 * a_2 - a_0 * a_3 & 0 \\ -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 & 0 & a_1 * a_2 - a_0 * a_3 & 0 \\ a_0 * a_3 - a_1 * a_2 & 0 & -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 & 0 \\ a_0 * a_3 - a_1 * a_2 & 0 & -a_0 * a_1 - a_2 * a_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 10. Некоммутативность произведения двух комплексных чисел  $C_{02}$  и  $C_{13}$

Сумма  $C_{02} + C_{13}$  этих двух комплексных чисел не является комплексным числом: она принадлежит к подмножеству матриц, образующих систему многомерных чисел или операторов, которые с учетом их свойств автор называет «тензоркомплексными» числами четвертого порядка (поскольку в данном примере речь идет о матрицах четвертого порядка). Рассмотрим свойства суммы  $C_{02} + C_{13}$ .

#### 4. О «тензоркомплексных», «тензордвойных» и иных «тензорчислах»

На рис. 11 показана названная сумма  $C_{02} + C_{13}$  двух комплексных чисел, представленных  $(4 \times 4)$ -матрицами из рис. 8 и 9. Эта сумма является  $(4 \times 4)$ -матрицей, у которой два квадранта вдоль главной диагонали тождественны, а два квадранта вдоль второй диагонали отличаются только инверсией знаков.

$$C_{02} + C_{13} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & -a_2 & a_3 \\ -a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_2 & -a_3 & -a_0 & a_1 \end{bmatrix} = [1 \ 0; \ 0 \ 1] \otimes M + [0 \ 1; \ -1 \ 0] \otimes P$$

$$(C_{02} + C_{13})^{-1} = (2 * (a_0^2 + a_2^2))^{-1} * \begin{bmatrix} a_0 & -a_0 & a_2 & -a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2 & a_0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (2 * (a_1^2 + a_3^2))^{-1} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1 & -a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_3 & a_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Рис. 11. *Вверху*: сумма двух комплексных чисел  $C_{02}$  и  $C_{13}$  из рис. 8 и 9; здесь  $M = [a_0 \ a_1; -a_0 \ a_1]$  и  $P = [-a_2 \ a_3; a_2 \ a_3]$ ;  $\otimes$  – символ тензорного произведения.

*Внизу*: выражение для обратного числа  $(C_{02} + C_{13})^{-1}$

Очевидно, что эта матрица может быть записана в форме  $C_{02} + C_{13} = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes M + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes P$ , где  $M = [a_0 \ a_1; -a_0 \ a_1]$ ,  $P = [-a_2 \ a_3; a_2 \ a_3]$ ,  $[1 \ 0; 0 \ 1]$  – матричное представление вещественной единицы,  $[0 \ 1; -1 \ 0]$  – матричное представление мнимой единицы  $i$  комплексного числа ( $i^2 = -1$ ). В этой форме за-



писи сумма  $C_{02}+C_{13}$  напоминает матричное представление комплексного числа  $z = [1 \ 0; 0 \ 1]*a + [0 \ 1; -1 \ 0]*b$ , которое имеет обратное число  $z^{-1} = (a^2 + b^2)*[a, b; -b a]$ . Для суммы  $C_{02}+C_{13}$  также имеется сходное по виду обратное число  $(C_{02}+C_{13})^{-1}$  (рис. 11, внизу).

Перемножение двух (4×4)-матриц  $G$  и  $S$ , имеющих тот же вид, что  $C_{02}+C_{13}$ , дает матрицу (рис. 12), представимую аналогичным образом:  $V = G*S = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes K + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes L$ , где  $K$  и  $L$  являются матрицами более общего вида, чем матрицы  $M$  и  $P$ . Матрицы  $C_{02}+C_{13}$  – частный случай матриц  $V$ .

Запись этих матриц  $V = G*S = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes K + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes L$  (см. рис. 12) отличается от традиционной матричной записи комплексного числа  $z = [1 \ 0; 0 \ 1]*a + [0 \ 1; -1 \ 0]*b$  следующими особенностями:

1) выражение  $V = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes K + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes L$  содержит тензорное умножение  $\otimes$  вместо обычного умножения в выражении  $z = [1 \ 0; 0 \ 1]*a + [0 \ 1; -1 \ 0]*b$ ;

2) в выражении  $V$  множителями при базовых элементах  $[1 \ 0; 0 \ 1]$  и  $[0 \ 1; -1 \ 0]$  являются матрицы  $K$  и  $L$  вместо вещественных чисел  $a$  и  $b$  в выражении  $z = [1 \ 0; 0 \ 1]*a + [0 \ 1; -1 \ 0]*b$ ;

3) очередность сомножителей в выражении  $V$  существенна, поскольку тензорное умножение некоммукативно.

$$G = \begin{bmatrix} a & c & -b & d \\ -a & c & b & d \\ b & -d & a & c \\ -b & -d & -a & c \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} k & m & -n & p \\ -k & m & n & p \\ n & -p & k & m \\ -n & -p & -k & m \end{bmatrix}$$

$$G*S = \begin{bmatrix} a*k-c*k-b*n-d*n & a*m+c*m+b*p-d*p & c*n-a*n-d*k-b*k & a*p-b*m+d*m+c*p \\ b*n-c*k-a*k-d*n & c*m-a*m-b*p-d*p & b*k+a*n-d*k+c*n & b*m-a*p+d*m+c*p \\ b*k+a*n+d*k-c*n & b*m-a*p-d*m-c*p & a*k-c*k-b*n-d*n & a*m+c*m+b*p-d*p \\ d*k-a*n-b*k-c*n & a*p-b*m-d*m-c*p & b*n-c*k-a*k-d*n & c*m-a*m-b*p-d*p \end{bmatrix}$$

Рис. 12. Произведение  $V = G*S$  двух разных матриц вида  $C_{02}+C_{13}$

из рис. 11 дает матрицу вида  $V = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes K + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes L$ ,

где  $K = [a*k-c*k-b*n-d*n, a*m+c*m+b*p-d*p; b*n-c*k-a*k-d*n, c*m-a*m-b*p-d*p]$ ,

$L = [c*n-a*n-d*k-b*k, a*p-b*m+d*m+c*p; b*k+a*n-d*k+c*n, b*m-a*p+d*m+c*p]$ .

Здесь  $a, b, c, d, k, m, n, p$  – вещественные числа

Матрицы вида  $V = [1 \ 0; 0 \ 1] \otimes K + [0 \ 1; -1 \ 0] \otimes L$  можно не только складывать и вычитать, но и перемножать, получая в результате матрицу того же вида (умножение некоммукативно). Они имеют обратные матрицы, определяемые обычным образом через соотношение  $V*V^{-1}=E$ , где  $E$  – обычная единичная матрица соответствующего порядка. Значит, такие матрицы можно делить друг на друга, определяя деление как умножение на обратную матрицу.

Из перечисленных свойств матриц вида  $V=[1\ 0; 0\ 1]\otimes K + [0\ 1; -1\ 0]\otimes L$  следует, что их множество образует систему многомерных чисел или операторов (в общем случае матрицы  $K$  и  $L$  могут быть  $(2^N \times 2^N)$ -матрицами). Нам не известно о существовании данных систем многомерных чисел где-либо в математическом естествознании. Матрицы вида  $V$ , множество которых образует предположительно новый для математического естествознания класс числовых систем, автор называет «тензоркомплексными числами», учитывая тензорное умножение в их записи (матрица четвертого  $V$  на рис. 12 дает выражение для тензоркомплексных чисел четвертого порядка, но не для общего случая тензоркомплексных чисел порядка  $2^N$ ).

Перечисленные свойства тензоркомплексных чисел  $V$  напоминают алгебраические свойства кватернионов Гамильтона, множество которых образует четырёхмерную ассоциативную алгебру с делением над полем вещественных чисел. Подчеркнем, что тензоркомплексные числа кардинально отличаются от гиперкомплексных чисел  $x_0+x_1*i_1+\dots+x_n*i_n$ , где  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – вещественные числа, а потому на них не распространяется теорема Фробениуса для гиперкомплексных чисел ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема\\_Фробениуса](http://ru.wikipedia.org/wiki/Теорема_Фробениуса)).

Аналогичным образом [5], исходя из столбцовых проекторов радемахеровских геноматриц  $\mathbf{R}_4$  и  $\mathbf{R}_8$  (см. рис. 2), определяются «тензордвойные числа»  $D = [1\ 0; 0\ 1]\otimes Q + [0\ 1; 1\ 0]\otimes B, [0\ 1; 1\ 0]$  – матричное представление мнимой единицы  $j$  двойного числа ( $j^2 = +1$ ), а  $Q$  и  $B$  – матрицы, выступающие в роли тензорных множителей при базисных элементах  $[1\ 0; 0\ 1]$  и  $[0\ 1; 1\ 0]$ .

Различные типы подобных многомерных чисел или операторов объединяются под общим кратким названием – «тензорчисла». Тензорчисла  $[1]\otimes M_0+[i_1]\otimes M_1+\dots+[i_n]\otimes M_n$  (здесь  $M_n$  – квадратные матрицы) определяются как обобщения гиперкомплексных чисел  $1*x_0+i_1*x_1+\dots+i_n*x_n$  при следующих изменениях в обычной записи последних:

- вещественные множители  $x_0, x_1, \dots, x_n$  заменяются квадратными матрицами одинакового порядка  $M_0, M_1, \dots, M_n$ ;
- обычное умножение заменяется тензорным умножением.

Очевидно, что гиперкомплексные числа  $1*x_0+i_1*x_1+\dots+i_n*x_n$  являются предельным, вырожденным случаем тензорчисел при первом порядке матриц  $M_n$  в последних, поскольку: 1)  $(1 \times 1)$ -матрицы  $M_n = [x_n]$  представляют вещественные числа  $x_n$ ; 2) тензорное произведение  $[i_n]\otimes [x_n]$  матрицы первого порядка  $[x_n]$  и матричного представления любого базисного элемента  $[i_n]$  коммутативно и совпадает с обычным произведением. Поэтому справедливо выражение:  $[1]\otimes [x_0]+[i_1]\otimes [x_1]+\dots+[i_n]\otimes [x_n] = [1]*x_0+[i_1]*x_1+\dots+[i_n]*x_n$ .

Известно, что разным природным системам могут соответствовать разные алгебры и геометрии (см., например: [20]). По мнению автора, многие трудности развития математической биологии обусловлены тем, что к биологическим системам подходят с позиций неадекватных алгебраических конструкций, развитых для изучения совсем иных природных объектов. По-

этому изучение алгебраических систем, с которыми связана система генетического кодирования, представляется актуальным для развития алгебраической биологии. Живая материя в своих информационных основах предстает глубоко алгебраической сущностью. Проекционные операторы являются важным инструментом раскрытия этой алгебраической сущности. Автор надеется, что тензоркомплексные и другие тензорчисла, обратившие на себя внимание при исследованиях генетических проекторов, окажутся полезными не только для теоретической биологии (в частности для развития теории морфогенетического поля), но и для других областей математического естествознания и технологии, включая теорию физических полей и их обобщений, технологии искусственного интеллекта и обработки информации и пр. Новые системы многомерных чисел могут оказаться полезными также в связи с развитием современных направлений механики и машиностроения, занимающихся многомерными системами и процессами; например, книга [21] вводит в рассмотрение широкий класс многомерных резонансных колебаний, способных являться причиной техногенных катастроф.

### 5. Дополнение о генетических проекторах

Все вышеназванные адамаровы и радемахеровские геноматрицы  $H_4$ ,  $H_8$ ,  $R_4$ ,  $R_8$  и их алгоритмические расширения  $H_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  и  $R_4 \otimes [1 \ 1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  могут быть выражены в виде сумм и тензорных произведений всего четырех  $(2 \times 2)$ -матриц столбцовых проекторов (или аналогичных строчных проекторов), показанных на рис. 13.

$$\left| \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ 1 \ 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} 1 \ 0 \\ -1 \ 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} 0 \ -1 \\ 0 \ 1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \end{array} \right|$$

Рис. 13. Базисный набор четырех  $(2 \times 2)$ -проекторов

На рис. 14 приведены примеры выражения через эти  $(2 \times 2)$ -проекторы комплексных и двойных чисел с единичными координатами, а также геноматриц  $R_4$  и  $H_4$ . Составление соответствующих выражений для гиперкомплексных чисел с единичными координатами  $H_4 \otimes [1 \ -1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  и  $R_4 \otimes [1 \ 1; \ 1 \ 1]^{(N)}$  очевидно. Это означает, что 2-мерные пространства могут рассматриваться как исходные или фундаментальные в данном модельном подходе. Здесь возникают ассоциации с тем, что именно 2-мерные подпространства играют фундаментальную роль в морфологической организации и развитии живых организмов: примером являются зародышевые листки или пластины, из которых развиваются органы животных организмов ([http://ru.wikipedia.org/wiki/Зародышевые\\_листки](http://ru.wikipedia.org/wiki/Зародышевые_листки)). Так, органы тела человека развиваются из трех зародышевых листков.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ R_4 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ H_4 = & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Рис. 14. Примеры применения базисного набора (2×2)-проекторов из рис. 13 для выражения через них комплексных и двойных чисел с единичными координатами, а также геноматриц R<sub>4</sub> и H<sub>4</sub>**

Поиск принципов запрета в природных системах является одной из важных задач математического естествознания (примером является принцип запрета Паули в квантовой механике). В матричной генетике учет косых проекторов позволил автору сформулировать феноменологический принцип запрета во множестве всех известных науке 19 диалектов генетического кода. Речь идет о том, что в некоторых диалектах имеются небольшие отклонения от основной схемы разделения множества триплетов по признаку сильных и слабых корней, а поэтому черно-белая мозаика в геноматрице 64 триплетов [C U; A G]<sup>(3)</sup> (см. рис. 1) в 6 из 19 диалектов немного изменяется. Числовые матрицы, возникающие при замене триплетов с сильными и слабыми корнями на «+1» и «-1», называются «±1-представлениями» диалектов генетического кода. Выявлено правило, что «±1-представления» геноматрицы [C U; A G]<sup>(3)</sup> у всех 19 диалектов генетического кода являются суммами косых проекторов. Это позволяет сформулировать соответствующий **принцип запрета**: *Эволюции запрещено изменять кодовые значения триплетов так, чтобы их разделение на триплеты с сильными и слабыми корнями вело к нарушению названного правила о сумме косых проекторов.*

Представленная в статье проблема наследуемых ансамблей биологических циклов тесно связана с фундаментальными проблемами биологических часов и времени, старения и пр. Полученные в «матричной генетике» результаты позволяют выдвинуть «проеекционную концепцию», которая интерпретирует живые тела как колонии проекционных операторов. Определенную роль в важном значении проекторов для генетической системы и наследуемых структур живых организмов может играть то, что эволюция организмов связана с потреблением солнечной энергии, которая проецируется солнечными лучами на поверхность тела и поступление которой носит циклический характер в силу циклов «день-ночь». Механизмами фотосинтеза проецируемая энергия солнечных лучей преобразуется в химическую энергию для обеспечения активности организмов, производства растительной массы, которой питаются травоядные животные, и пр.

Также можно полагать, что природа вообще любит конструкции на основе проекторов, чему можно привести, например, следующие свидетельства

ва: 1) электромагнитные векторы представляют собой сумму их проекций в форме электрического и магнитного векторов; 2) явление двойного лучепреломления в кристаллах; 3) проекторы в нашем зрении при проецировании на сетчатку глаза и пр.; 4) способность зрения у многих видов животных видеть поляризованный свет (причем для этого фоторецепторные клетки в сетчатке глаз кальмаров, каракатиц и осьминогов расположены так, что плоскости восприятия света в соседних фоторецепторах строго перпендикулярны друг другу).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Stewart I.* Life's other secret: The new mathematics of the living world. – New-York, Penguin, 1999.
2. *Петухов С.В.* Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. – М.: РХД, 2008. – 316 с.
3. *Петухов С.В.* Гиперкомплексные числа, генетическое кодирование и алгебраическая биология // Метафизика. – 2012. – № 3 (5). – С. 64–88.
4. *Petoukhov S.* Symmetries of the genetic code, hypercomplex numbers and genetic matrices with internal complementarities // Symmetries in genetic information and algebraic biology / спецвыпуск журнала "Symmetry: Culture and Science". – 2012. – V. 23. – № 3–4. – P. 275–301. URL: [http://symmetry.hu/scs\\_online/SCS\\_23\\_3-4.pdf](http://symmetry.hu/scs_online/SCS_23_3-4.pdf)
5. *Petoukhov S.* The genetic code, algebra of projection operators and problems of inherited biological ensembles. URL: <http://arxiv.org/abs/1307.7882>, вторая версия от 30.12.2013. – 48 с.
6. *Конопельченко Б. Г., Румер Ю. Б.* Классификация кодонов в генетическом коде // ДАН СССР. – Т. 223. – 1975. – № 2. – С. 471–474.
7. *Залманзон Л. А.* Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других системах. – М.: Наука, 1989.
8. *Хармут Х.* Передача информации ортогональными функциями. – М.: Связь, 1975.
9. *Хармут Х.* Теория секвентного анализа. – М.: Мир, 1980.
10. *Seberry J., Wysocki B. J., Wysocki T. A.* On some applications of Hadamard matrices. – Metrica. – 2005. – Vol. 62. – P. 221–239.
11. *Бернштейн Н.А.* Физиология движений и активность. – М.: Наука, 1990
12. *Пуанкаре А.* Ценность науки. – М.: Творческая мысль, 1906. – 194 с.
13. *Пуанкаре А.* Наука и метод. СПб: Изд-во Карбасникова, 1910. – 238 с.
14. *Vetter R.J., Weinstein S.* The history of the phantom in congenitally absent limbs // Neuropsychologia. – 1967. – № 5. – P. 335–338.
15. *Weinstein S., Sersen E. A.* Phantoms in cases of congenital absence of limbs // Neurology. – 1961. – № 11. – P. 905–911.
16. *Владимиров Ю.С.* Основания физики. – М.: БИНОМ, 2008. – 456 с.
17. *Кулаков Ю.И.* Теория физических структур. – М., 2004. – 847 с.
18. *Russel B.A.W.* An essay on the foundations of geometry. – N-Y: Dover, 1956. – 201 p.
19. *Петухов С.В.* Биомеханика, бионика, симметрия. – М.: Наука, 1981. – 239 с.
20. *Клайн М.* Математика. Потеря определенности. – М.: Мир, 1984.
21. *Ганиев Р.Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. – М.: РХД, 2013. – 591 с.

## THE GENETIC CODE AND PROJECTION OPERATORS OF MATRIX GENETICS

**S.V. Petoukhov**

Some results of the study of noise-immunity system of molecular genetic coding are presented. This study is based on an application of matrix methods of engineering theory of noise-immunity codes. These results reveal the relationship between genetic system and formalism of the theory. The important role of oblique (non-orthogonal) projection operators and their superpositions in this study is noted, as well as in the modeling of inherited processes and structures. Systems of multidimensional numbers or matrix operators are described, which arise on this basis and which are briefly referred to as «tenzornumbers» («tenzorcomplex», «tenzordouble» etc.). It is hypothesized that many of the difficulties of mathematical biology are caused by the inadequacy of used numerical systems for living matter. It is hypothesized that many of the difficulties of mathematical biology are caused by the inadequacy of numerical systems used now to study living matter. Development of genetic biomechanics is discussed, where a dependence of inherited physiological structures on structural regularities of genetic coding should be taken into account. Algebraic properties of the system of genetic coding show a possibility of a new – algebraic – way of knowledge of living matter that is associated with projection operators and multidimensional numbers. Living matter, which transmits genetic information along chains of generations, seems to be an information essence, which is deeply algebraic in its nature.

**Key words:** genetic alphabets, projection operators, tensor multiplication of matrices, matrix genetics, Rademacher functions, Walsh functions, Hadamard matrices, cyclic groups, genetic biomechanics, multidimensional numbers.