ПРИНЦИП МАХА В КОНТЕКСТЕ ОСМЫСЛЕНИЯ ФЕНОМЕНА НЕПРЕРЫВНОСТИ

С.А. Векшенов

Российская академия образования

В статье обосновывается утверждение, что в континууме можно выделить два компонента: неограниченную совокупность «точек» и совокупность «не-точек» – неких динамических «агрегатов», которые противопоставляются точкам, но составляют с ними единое целое. «Не-точками» могут быть очень разные объекты. В частности, ими могут выступать отношения $r_{ij} \dots r_{kl}$ между «точками» $a_1 \dots a_k$, имеющие динамический характер, то есть некоторые взаимодействия. Условие непрерывности в этом случае заключается в том, что каждая «точка» взаимодействует со всеми остальными «точками». Это условие можно рассматривать как одну из форм принципа Маха, который в этом случае становится принципом непрерывности.

Ключевые слова: парадоксы Зенона, континуум, «точки», «не-точки», принцип Маха.

Осмысление феномена непрерывности и развитие его формализмов всегда было одной из сверхзадач» человеческой мысли. В настоящее время общепринятая модель континуума опирается на теорию множеств. Эта модель заняла столь прочное место в сознании, что всякое упоминание о непрерывном автоматически ассоциируется с этой моделью. Разумеется, это далеко не так, но чтобы понять, что именно не учитывается в этой модели, необходимо совершить паломничество к истокам самой идеи непрерывного – парадоксам (апориям) Зенона.

1

В классических апориях Зенона (прежде всего, в апориях «Ахиллес» и «Дихотомия») вполне обрисована связь непрерывности с актуальной бесконечностью. Более того, в этих апориях фактически речь идет о *двух* типах актуальной бесконечности: бесконечности количества – ω (которую можно расширить до любого кардинала $\aleph_\lambda$) и бесконечности порядка – Ω. При этом выполняется неравенство $\Omega > \omega$.

Теория множеств Кантора принципиально *не различает* эти бесконечности. Для нее существенно только бесконечное количество, которое воплощается в множестве. Соответственно, среда непрерывности, континуум в этой теории мыслится множеством. Этот подход мало соответствует первоначальной, идущей от Аристотеля идее, что «неделимые» (элементы множества) являются только внешним проявлением непрерывного. Теория точечного континуума дает вполне удовлетворительную (хотя и с множеством проблем) модель непрерывного, на предметном уровне, пока различие между количественной и порядковой бесконечностью не существенно.

Рассмотрим эти утверждения более подробно.

Идея непрерывного, как известно, восходит к апориям Зенона, прежде всего «Ахиллес» и «Дихотомия».

Мы не будем пытаться реконструировать его аргументы, а попытаемся понять, какие именно проблемы возникают при осмыслении феномена непрерывности, которые и привели к возникновению апорий.

Как известно, суть апории «Ахиллес» сводится к следующему.

Пусть Ахиллеса отделяет от финиша расстояние в *1*, а черепаху в ½. Предположим, что Ахиллес бежит быстрее черепахи в два раза. Ахиллес и черепаха начинают двигаться одновременно. Зенон утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху. Действительно, в то время как Ахиллес пробегает половину пути, то есть приходит в точку начала движения черепахи, она успеет проползти отрезок в *¼*. Когда же Ахиллес преодолеет расстояние в *¼*, черепаха пройдет расстояние в *1/8,* и опять окажется впереди Ахиллеса и т.д. Таким образом, всякий раз, когда Ахиллес преодолевает расстояние, отделяющее его от черепахи, она успевает уползти от него на некоторое расстояние.

Попытаемся выявить формальную сторону этой апории.

Рассмотрим конечный отрезок *[A,B]*. Представим его в виде счетной суммы отрезков, длина которых монотонно стремится к нулю:

$$[A,B]=\sum_{k=1}^{\omega}[a_k, a_{k+1}]\text{, где } a_1=A \text{ и } a_\omega=B.$$

Если считать a_k – шагами Ахиллеса, а a_{k+1} – шагами черепахи, то, очевидно, что в точке *B* Ахиллес догонит черепаху. С другой стороны, точки этой последовательность *занумерованы* натуральными числами (точнее, порядковыми натуральными числами), которые вовсе не оканчиваются на ω, поскольку всегда можно сделать еще один шаг и образовать числа: ω+1, ω+2… Таким образом, последовательность $\{a_k\}$, с одной стороны, сходится к *B*, с другой (с точки зрения номеров) – не ограничена. Заметим, что ситуация останется ровно такой же, если заменить число ω любым кардиналом $\aleph_\lambda$.

Эта двойственность в понимании сходимости последовательности $\{a_k\}$ отразилась в двойственной оценке этой апории. Значительная часть авторов, считала, что проблема исчерпывается введением актуальной бесконечности, которую Зенон (как, впрочем, и вся античная наука) предпочитал избегать. Однако после всестороннего исследования теоретико-множественной бесконечности такое решение стало рассматриваться как не вполне убедительное.

Примером этому является следующее замечание Д. Гильберта и П. Бернайса, высказанное ими в знаменитой монографии «Основания математики».

«Обычно этот парадокс пытаются обойти рассуждениями о том, что сумма бесконечного числа этих временных интервалов все-таки сходится и дает конечный промежуток времени, однако это рассуждение абсолютно не затрагивает один существенный парадоксальный момент, а именно парадокс, заключающийся в том, что некая последовательность следующих друг за другом событий, последовательность, завершаемость которой мы не можем себе даже и представить (не только фактически, но хотя бы даже и в принципе), на самом деле все-таки должна завершиться…» [1. С. 40].

Вернемся к формализованным рассуждениям.

В приведенном выше представлении отрезка *[A, B]* имеется два взаимосвязанных параметра: число разбиений ω и длина отрезка $[a_k, a_{k+1}]$. Число разбиений имеет своим пределом число Ω. Можно предположить, что этому случаю соответствует нулевая длина отрезка $[a_k, a_{k+1}]$, то есть справедливо следующее соотношение:

$$[A,B] = \sum_{k=1}^{\Omega} (a_k),$$

где $a_1 = A$ и $a_\Omega = B$ *и* (a_k) означает точку с номером *k.*

Однако это не так, поскольку в этом случае отрезок *[A,B]* представлял бы собой упорядоченное *множество,* кардинальное число которого $\aleph_\lambda$ заведомо меньше Ω: $\aleph_\lambda < \Omega$.

Таким образом, дойдя до числа Ω, мы получим следующее разбиение отрезка *[A,B]*:

$$[A,B] = \mathrm{X} + \mathrm{Y},$$

где *X – неограниченная совокупность* «точек», *Y – совокупность* «не-точек» – неких динамических «агрегатов», которые противопоставляются точкам и составляют с ними единое целое.

Отрезок *[A,B]*, фигурирующий в конструкции Зенона, является интуитивно непрерывным, при этом компонента Y обеспечивает отсутствие «пустот» между «точками».

2

Приведенная общая конструкция позволяет считать «не-точками» очень разные объекты, с помощью которых отрезок *[A,B]*, а в общем случае континуум можно «настраивать» на различные задачи.

Можно показать, что в качестве «не-точек» можно взять следующие объекты:

- бесконечно малые величины *dx* в их изначальном понимании;
- комплексную амплитуду $re^{-i\varphi}$;

- отношения $r_{ij} \dots r_{kl}$ между «точками» $a_1 \dots a_k$, имеющие динамический характер, то есть некоторые взаимодействия.

Дадим краткие пояснения.

Сформулированный дуализм континуума говорит о том, что он не может рассматриваться как чисто геометрический объект. Тем не менее желание сделать его таковым явилось одной из «сверхзадач» теории множеств. Единственная возможность ее решения заключается в представлении «не-точки», то есть некоторого самодостаточного процесса как совокупности его состояний. Динамику же можно имитировать определенными операциями над этими состояниями. Конечный итог этой деятельности практически однозначно ведет к понятию топологического пространства.

Наличие в континууме «не-точек» имеет существенные технические неудобства. На них необходимо распространить алгебраические операции, имеющиеся в поле действительных чисел (традиционно отождествляемом с «точками»), что является далеко нетривиальной задачей. Эту проблему хорошо понимал Г.В. Лейбниц: «Новый анализ бесконечных рассматривает не линии, не числа, но величины вообще, как это делает обыкновенная Алгебра. Этот Анализ содержит новый алгоритм, то есть новый способ складывать, вычитать, умножать, делить, извлекать корни, соответствующий несравнимым величинам, то есть тем, которые бесконечно велики или бесконечно малы в сравнении с другими…». Тем не менее корректно решить эту задачу удалось только в 1961 в «нестандартном анализе» А. Робинсона. Ключевым моментом его конструкции было использование ультрафильтра, что позволило перенести на бесконечно малые величины («не-точки») все необходимые алгебраические операции.

Амплитуду также можно рассматривать как «не-точку» континуума, однако это требует определенной работы. В наибольшей степени свойства амплитуды проявляются в квантовой механике, когда она выступает инструментом соединения «точек», неограниченно удаленных в смысле теоретико-множественного континуума (например в парадоксе ЭПР). Поскольку статус амплитуды как самодостаточной динамической сущности присутствует в большей степени на интуитивном уровне, ее «алгебраизация» мыслится чрезвычайно простой – она просто отожествляется с комплексным числом $a+ib$, которое, как известно, представляется точкой комплексной плоскости. Разумеется, такое отождествление, как и отождествление dx с постоянной величиной, урезает существенные черты континуума и происходящих в нем физических процессов. Возможность мыслить амплитуды числами и корректный перенос на них алгебраических операций был осуществлен в работах [3; 4] и др. Существенными моментами предлагаемой в них конструкции является использование сюрреальных чисел Д. Конвея и порядковой бесконечности.

В рамках сформулированной темы особый интерес представляют «не-точки», построенные на основе отношений $r_{ij} \dots r_{kl}$, между «точками» $a_1 \dots a_k \dots$ Эти отношения должны удовлетворять следующим условиям:

– быть динамическими, то есть иметь характер взаимодействий;

– взаимодействия распространяются на все «точки». Иными словами, каждая «точка» взаимодействует со всеми другими «точками». Только в этом случае можно добиться интуитивного «отсутствия пустот», то есть сделать все «точки» равноправными, что является одним из основных свойств континуума.

Второе из названных условий можно понимать как обобщенную форму *принципа Маха*, который в данном контексте выступает *принципом непрерывности*.

Как и в случае других «не-точек», возникает проблема распространения на них основных алгебраических операций. Традиционно отношения соотносятся с действительными или комплексными числами, что дает повод говорить о решении названной проблемы. Однако это, по сути, снова означает отождествление «точки» и «не-точки». Корректным представляется соотнесение отношения r_{ij} с амплитудой (что фактически реализовано в БСКО).

Таким образом можно сказать, что каждая из названных «не-точек» определяет «свой» континуум. Эти континуумы будем обозначать как R^{dx}, R^{Ψ}, R^{rij}, при этом «не-точки» играют в них приблизительно такую же роль, как и подвижные метрические коэффициенты g_{ij} в римановой геометрии.

Сформулируем ряд вопросов, вытекающих из приведенных конструкций.

Прежде всего следует задать принципиальный вопрос: являются ли континуумы R^{dx}, R^{Ψ}, R^{rij} изоморфными? Как нам представляется, ответ на этот вопрос при разумных уточнениях конструкций «не-точек» должен быть положительным. Следствием это изоморфизма явилась бы, в частности, эквивалентность соотношений, записанных в дифференциальной форме и в форме отношений. На языке физики это означает математическую эквивалентность полевой и реляционной парадигм. Решающая роль в этой вероятной эквивалентности принадлежит принципу Маха, который превращает совокупность отношений (взаимодействий) в континуум.

Заметим, что с точки зрения физики континуумы R^{dx}, R^{rij} не эквивалентны в следующем смысле. Для существования «не-точек» dx необходимо объемлющее пространство-время, в то время как отношения r_{ij} являются самодостаточными. Более того, будучи динамическим агрегатами, в общей структуре отношений-взаимодействий можно выделить некую линейную подструктуру, которую естественно охарактеризовать как «пред-время». Склеенные определенным образом, «моменты» пред-времени можно отождествить с геометрическими точками (в то время как сами «точки» континуума мыслятся физическими объектами и являются источниками взаимодействий). Таким образом, континуум R^{ri} с материальными «точками» может быть трансформирован в континуум $\star R^{rij}$, с той же структурой, но уже геометрическими «точками».

Второй, естественный и принципиальный для физики, вопрос заключается в возможности определения в континуумах R^{dx}, R^{Ψ}, R^{rij} метрики. Ответ на этот вопрос, опять-таки при определенных ограничениях на конструкции «не-точек», положительный. Задача определения метрики в названных континуумах схожа с задачей определения метрики в топологическом пространстве. Известные там конструкции, например лемма Урысона о метризации, могут быть трансформированы для всех видов «не-точек», в частности «не-точек» r_{ij}.

Как нам видится, ответы на поставленные вопросы позволят укрепить математический фундамент реляционной парадигмы. При этом решающая техническая конструкция континуума $R^{r_{ij}}$ опирается на принцип Маха.

3

В немецкой академической среде бытовала поговорка: *"Wer nichts ordentlichs kann, macht Methodologie"* (Кто не способен ни на что путное, тот занимается методологией). С риском реализовать эту мысль, попытаемся все же отрефлектировать приведенное выше построение.

Введение многообразия континуумов стало возможным благодаря расширению интуиции непрерывного. Со времен Лейбница непрерывность мыслилась как одно из условий самодостаточности Мира, как следствие общего принципа законопостоянства, который утверждал, что свойства вещей всегда и повсюду являются такими же, каковы они здесь и сейчас. В мире, непрерывном по Лейбницу, нет места «особым точкам», а значит, и нет места любому «вмешательству извне».

В таком понимании непрерывность есть, по сути, синоним всеобщей связи, *всеединства* различных уровней бытия (именно так понимал непрерывность, например, св. Фома Аквинский). В этом плане позиции Г.В. Лейбница и Э. Маха на сущность континуума оказываются очень близкими (и одинаково далекими от позиции Г. Кантора). Э. Мах был, прежде всего, естествоиспытателем и ставил перед собой иные задачи, чем Г.В. Лейбниц. Сформулированный им принцип был очень конкретным и относился, прежде всего, к проблемам механики. Однако метафизическая суть этого принципа оказалась гораздо шире и, как нам представляется, влилась в другой фундаментальный метафизический принцип – принцип непрерывности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мах Э.* Познание и заблуждение. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003.
2. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. – Т. 1. – М.: Наука, 1979.
3. Векшенов С.А. Метафизика и математика двойственности // Метафизика век XXI. – М.: БИНОМ, 2011. – С. 91–114.
4. *Векшенов С.А., Бешенков А.С.* Порядковые образы комплексных чисел и кватернионов в основаниях физики // Метафизика. – 2013. – № 9 – С. 70–85.

MACH'S PRINCIPLE IN THE CONTEXT OF CONCEPTUALIZATION OF CONTINUITY PHENOMENON

S.A. Vekshenov

The article substantiates the statement that two components can be singled out in a continuum: an infinite aggregate of "points" and an aggregate of "non-points"—certain dynamic "aggregates" which are contrasted to points yet constitute a single whole with them. Most varied objects can act as "non-points." In particular, relations r_{ij} … r_{kl}, between "points" $a_1 \dots a_k \dots$, having a dynamic character, i.e., certain interactions can act in their capacity. The condition of continuity in this case consists in the fact that every "point" interacts with all the other "points." This condition can be regarded as one of the forms of Mach's principle, which in this case becomes the principle of continuity.

Key words: Zeno's paradoxes, continuum, "points," "non-points," Mach's principle.