DOI: 10.22363/2224-7580-2020-3-26-38

ОТ МЕТАФИЗИКИ ЕВКЛИДА – К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ИДЕЯМ В ФИЗИКЕ СКВОЗЬ ВЕКА (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИДЕИ В ФИЗИКЕ РАСШИРЯЮТ ГОРИЗОНТЫ ПОЗНАНИЯ МИРА)

А.В. Ходунов

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
Российская Федерация, 117218, Москва, Нахимовский просп., 36, кор. 1

Аннотация. Статья состоит из двух частей. В первой части проведен исторический анализ с современными комментариями важности глубокого изучения устойчивых и прошедших тысячелетнюю проверку накопленных нашей цивилизацией знаний, опыта и традиций геометрического характера об устройстве мира. Помимо математики в физике традиции геометрических методов исследований идут от Архимеда, через творчество Леонардо да Винчи, Галилео Галилея, Рене Декарта, Исаака Ньютона и других учёных. Сейчас эта тенденция сильна как никогда. Во второй части кратко и тезисно излагается этапность того, как и к чему мы пришли на этом пути.

***Ключевые слова**:* история математики, геометрия Евклида, аксиоматика, проблемы современной физики, алгебраическая геометрия.

> Если не знаешь, откуда танцевать – танцуй от печки.
>
> *Русская пословица*

Для наших современников, чье мировоззрение формировалось в эпоху бурного научно-технического прогресса, череды научных, технических и технологических революций, глобализации и всеобщей информатизации – «печкой» принято считать начало во времени нашей Вселенной. Как именно это случилось – великая и неразрешимая загадка, но современной наукой точно установлено, что начало у неё было горячее. При этом так называемого Большого Взрыва, по-видимому, не было.

Древние восточные, египетские, античные и христианские традиции трактуют это событие по-разному. Чтобы продвинуться в нашем понимании подлинного устройства мира, взяв из древних легенд, мифов, притч и философских систем рациональное, общее и непротиворечивое, – нужно встать на твёрдый фундамент научного знания. Пути к нему ведут разные, но лидирующими науками в этой области являются физика и математика.

Часть I

Конечно, и математика, и физика начинались не с Античности. Вероятно, они намного древнее. Тем не менее европейская духовная культура и ее неотъемлемая часть – научная традиция – пришли к нам из Древней Греции, прочно закрепившись в нашем сознании и мировоззрении. Это было обусловлено глобальными географическими причинами и обстоятельствами; формированием и развитием языков и наций, национальных территорий, торговых связей и путей, заимствованием в ходе завоеваний ремесленных и военных технологий и другими подобными факторами.

Идеи и понятия этой великой эпохи больших достижений вошли в наш разум и быт. Но, к сожалению, очень опосредованно, без неразрывной передачи эстафеты живого понятийного аппарата и языка. Это заставляет нас с каждым нашим новым научным достижением вновь и вновь обращаться к ним и проецировать свою культуру на ту, эллинскую. Тогда, сопоставляя их и открывая в ней новое, мы становимся мудрее и дальновиднее.

Из неё – эллинской традиции синтетического, натурфилософского мировоззрения – к нам пришло понимание основ разумного и осознанного наблюдения и знания как стартового капитала для наших замыслов, идей и направлений их развития.

В современной системе начального, среднего и высшего образования в области естественных наук также всё начинается с Евклида, с его переосмысленных «Элементов», на русском языке известных как «Начала». Это 13 книг. К ним позже, в переработанном виде, через латинский и арабский периоды развития наук опосредованно добавились ещё две [1].

Реально живший Евклид, возможно сириец по происхождению, стал историческим предтечей того феномена, который сейчас понимают под псевдонимом Н. Бурбаки, – канонического олицетворения достижений целой Александрийской школы математиков и педагогов, работавших при Александрийской библиотеке. Они активно переработали и использовали находки и открытия как предшественников Пифагорейской школы, так и своего современника Архимеда.

Именно не та, что сейчас, последовательность школьного и вузовского изучения математических дисциплин должна заставить нас глубоко задуматься. У Евклида последовательность книг важна. Предваряет книгу I система из пяти аксиом, предъявляющих первичные понятия, требующих особого, отдельного осмысления.

Далее, в книге I дано описание свойств треугольников и параллелограммов, включая теорему Пифагора. (В наши дни, перефразируя известное изречение, «треугольник неисчерпаем как атом, и (его) Вселенная – бесконечна». Про него написаны толстые тома, причём он несёт на себе отпечаток шестой, неявной у Евклида аксиомы; в евклидовых пространствах существуют жёсткие структуры, что наглядно и очевидно даёт возможность применять их для суперпозиций (как наложений) при сравнениях и замещениях.)

Затем в книгах II–IV представлены достижения пифагорейской школы, касающиеся первичных свойств линий, поверхностей, окружностей, кривых и многоугольников, а также пределов при вычислении их свойств.

В книгах V–VIII излагается теория пропорций, применённая к исследованию подобия для правильных 4-, 5-, 6-, 10-угольников, поднимается проблема об измерении круга (окружности).

Из VII—IX книг мы узнаём о пропорциях и прогрессиях в мире чисел, о множестве простых чисел и его бесконечности, о применениях алгоритма Евклида к арифметической теории делимости. (В современной традиции числовые проблемы оказались оторванными от геометрии и изучаются в курсах алгебры, хотя сейчас в её рамках появилось направление «Геометрическая теория чисел», доступное, однако, лишь профессионалам.)

Наиболее сложная книга X даёт нам представление о высших достижениях греческой математики. В ней описаны идеи о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, найдены другие виды иррациональностей, широко используется метод доказательства «от противного» как логико-геометрический приём.

Книги XI, XII, XIII представляют собой завершение геометрической серии построений, приписываемых собственно периоду творчества Евклида. Сейчас эту дисциплину называют стереометрией: в ней с помощью принципа исчерпания описываются отношения площадей кругов, объёмов кубов, конусов, пирамид и цилиндров, равенство и подобие выпуклых многогранников, измерение объемов и поверхностей тел. Современник Евклида – Архимед считал высшими достижениями в своей жизни целочисленные отношения площадей поверхностей и объёмов, вписанных в круговой цилиндр конуса, шара и самого цилиндра 1; 2; 3 (избегая при этом точного определения трансцендентного числа π). По преданию, шар, вписанный в куб, высечен на его могиле.

Венчает изложение построение и рассмотрение свойств пяти совершенных Платоновых тел.

Книга XIV написана александрийским математиком Гипсиклом 100 лет спустя, а книга XV – вероятно, Исидором Милетским из Константинополя, почти через 800 лет. Там изложены новые следствия и теоремы из уже заложенного фундамента.

В этом месте пришло время дать более широкие и глубокие комментарии.

Аксиоматический подход Евклида содержит в себе явное физическое и неявное метафизическое знание. Начнём с анализа аксиом Евклидовой геометрии самого Евклида. Он активно использует никак изначально не определимые, логически ничем не обоснованные, но интуитивно воспринимаемые понятия безграничных и непрерывных, неискривлённого 3-мерного пространства как универсального вместилища всех вещей, 2-мерной плоскости, 1-мерной линии и помещённых в них и/или на них 0-мерных точек.

Приведём явные аксиомы Евклида, а комментарии – в квадратных скобках.

1. Между двумя точками на плоскости проведём отрезок прямой. [направленный, непрерывный, единственный, минимальной длины вектор – очевидным физическим движением].

2. Продолжим его неограниченно тем же способом до получения прямой линии (или полупрямой – луча).

3. Вокруг любой точки на плоскости можно предъявить окружность, [то есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной как непрерывное, замкнутое, единственное семейство геометрических объектов, задаваемых геометрической, достаточно свободной и произвольной в плане выбора эталонного, единичного отрезка мерой, любого непрерывного радиуса].

4. Все прямые углы между любыми двумя пересекающимися (под этими углами) прямыми эквивалентны друг другу. [Они могут быть совмещены до совпадения физическими движениями в плоскости или пространстве, а сделанные из них прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды дают жёсткие замощения плоскости и пространства.]

5. В системе трёх произвольных пересекающихся прямых на плоскости, когда сумма двух внутренних односторонних углов у выбранных двух прямых линий с третьей меньше двух прямых углов, эти прямые, продолженные достаточно, пересекутся с той же стороны. [Определение – конструктивно: в нём нет даже понятия единственной параллельной прямой как предельного объекта, но есть метафизика структуры порядка.]

В «Элементах» у Евклида содержится ещё несколько положений, близких современным основаниям математики: из теории множеств, теории отношений и теории структур. Элементам из современных теорий множеств у него отвечают «вещи», то есть первичные и сконструированные из них геометрические объекты и их отношения; самотождественности (рефлексивность), эквивалентности двух элементов, если они порознь равны третьему (транзитивность). Неявное понятие класса эквивалентности во всех 5 аксиомах; (симметричность + рефлексивность + транзитивность) и отношение неравенства (асимметричность + транзитивность). Кроме того, в рассуждениях Евклида постоянно присутствует аддитивность по сложению и вычитанию (+ коммутативность и ассоциативность, то есть абелевость) и то, что целое всегда больше части (архимедовость и евклидовость – в современной арифметике).

Из таких отношений в наши дни строятся три основные структуры математики: топологическая, алгебраическая и порядковая. Сейчас они прочно вошли и в язык современной физики, и их необходимо активно использовать в метафизических рассмотрениях и теориях.

(Всё это ещё более роднит труды Евклида и труды школы анонимных французских математиков, известных под псевдонимом Н. Бурбаки).

Геометрическая структура устроена сложнее, как мы это сейчас знаем. Для её глубокого понимания и правильного описания нужно привлечь не только все три указанные выше структуры, но, возможно, и новые физические идеи. В своё время философ М.Э. Омельяновский [2–4; 19] предлагал такую формулу: полноценная теория (физической) реальности = геометрия+физика, причём составные части могут меняться от модели к модели, образуя дополнительное друг к другу диалектическое единство. Свежий пример: AdS/CFT-соответствие в современной фундаментальной физике.

Здесь опять нужно сделать замечание. ВСЕ ПЯТЬ аксиом Евклида словно нарочно выглядят как идеальные заготовки для всех диаграмм Фейнмана [5], которые всегда – 1-мерные множества, представимые как планарные графы с петлями (отвечающими виртуальным процессам в вакууме, для пропагаторов, то есть амплитуд вероятности квантового перехода частицы из одной точки в другую) и без них (свободные от взаимодействий частицы). Такие диаграммы описывают фундаментальные физические процессы в импульсно-энергетическом пространстве или, после преобразования Фурье, в координатном пространстве-времени, в квантовой теории поля (КТП). При этом внутренние линии и петли полагаются всех размеров (см. аксиому 3). По ним нужно проинтегрировать в (полу)бесконечных пределах, и здесь почти всегда возникают расходимости – бесконечности, устраняемые различными методами регуляризации и перенормировки. Они бывают двух сортов.

От малых энергий и импульсов – так называемые инфракрасные (ИК) расходимости. С ними никто не борется, так как по принципу неопределённостей Гейзенберга они отвечают влиянию дальнодействующих полей на больших (прицельных) расстояниях. (Наличие структурированной массивной материи при взаимодействиях с такими полями сильно меняет общую картину; нелокальности приобретают «одетый» в случайные взаимодействия характер. Это частые, очень слабые, или редкие, но сильные влияния. Хорошо известен пример кулоновского взаимодействия и рассеяния: для него дифференциальное сечение рассеяния расходится на малых углах, S-матрица – не существует. Однако чисто квантовые эффекты удваивают его по сравнению с классическим рассмотрением на всех углах. Требуется разумное обрезание сечения на асимптотике, и оно – находится. Никто во Вселенной не может избежать фоновых шумов и флуктуаций, делающих расчётные асимптотики на больших расстояниях физически ненаблюдаемыми. Астрономы считают, что до 95% видимой материи во Вселенной – это замагниченная плазма, имеющая разные характерные размеры. Пример сильного воздействия среды – пересоединение магнитных силовых линий в плазме: земной шар и его многослойная магнитосфера успешно избавляются от потока лишних зарядов, идущего от Солнца и космических лучей. Но в космическом чистом вакууме магнитные силовые линии нигде не начинаются и не кончаются (в модели соленоидального поля). Возникает сложная нестационарная хаотическая резонаторная система, в которой мы живём.

Иной характер имеют ультрафиолетовые (УФ) расходимости, отвечающие высоким энергиям и большим передаваемым импульсам. КТП присущ старый дефект классической и квантовой физики – точечность элементарных частиц, без которой в ней нарушается релятивистская инвариантность и ковариантность. Большинство физиков в наше время верит, что при возрастании энергии на всё меньших расстояниях восстанавливается настоящая, очень высокая, но сильно нарушенная симметрия нашего мира. При этом все поля становятся похожи на безмассовые и (с поправками на их поляризации) – друг на друга. В пределе возникает конформная квантовая теория поля (CFT). Разумные варианты таких теорий диктуют описание полей в размерностях $d = 11,12$, в (псевдо)евклидовых пространствах (для их перенормируемости и устранения квантовых аномалий).

Удивительным оказалось, что корреляторы – функции Грина, вплоть до двухпетлевого приближения совпали с аналогичными корреляторами, вычисленными в некоторых вариантах теорий суперструн и М-теорий, в моделях с $d = 10,11$, типа $AdS_5 \times M$, где $M = S^5, CY_6$, а однородное пространство $AdS_5 = SO(3,2)/SO(4,1)$ – это гиперболическое пространство анти-де Ситтера постоянной отрицательной кривизны. Исходя из Евклидова погружающего пространства $R^6 \to R^{5,1}$ (поворот Вика) при стереографической проекции из южного полюса 5-мерного однополостного гиперболоида, получается цилиндр с 4-мерным краем, который можно рассматривать как наше плоское пространство-время $R^{3,1}$. Компонент S^5, – сферическое пространство постоянной положительной кривизны, и CY_6 – многообразия Калаби–Яу, с особыми геометрическими и, возможно, физическими объектами, живущими на них. Дело в том, что в некоторых вариантах таких теорий квантовая гравитация перенормируема! И это может дать ключ к пониманию начала нашей Вселенной. В современной стандартной модели она прошла де Ситтеровскую стадию расширения и теперь находится во Фридмановской стадии. Квантовые вакуумы у де Ситтера и анти-де Ситтера – разные, и наши выдающиеся учёные пытаются понять и согласовать свои модели.

Обе серии теорий – крайне различны и физически, и математически, но главное – в том, что каждая из них может быть (изометрически) погружена и даже вложена в своё, подходящее Евклидово пространство R^n!

Это даёт возможности для детального сопоставления и сравнения вплоть до мелких и глобальных деталей математических свойств и особенностей анализируемых теорий. В итоге мы уже свыше 2300 лет имеем, продвигаем и синтезируем, совершенствуя, универсальный математический инструмент; и микро-, и мезо-, и телескопы для адекватного познания Природы.

В аксиоматическую систему Евклида неотъемлемой частью входит подсистема логического дедуктивного вывода – извлечения следствий в виде предложений, лемм и теорем. Все они различаются как фрагменты результатов абстрактных рассуждений, в порядке нарастания их сложности и важности. Эта часть уже отделена от непосредственной физической реальности. С современной точки зрения, любая логика содержит язык: набор символов и логических операций, синтаксис и семантику, аксиомы и правила вывода. Тут уже область не метафизики, но Метаматематики, где введение новых аксиом расширяет теорию, черпая новое и отвоёвывая себе новые области из ничем не ограниченного Универсума. Это особый открытый мир, уже свободный от чётких физических ориентиров, с отличиями, подобными отличиям аффинного пространства Леонарда Эйлера от Евклидова: начало отсчёта может быть любым. Приходит на ум метафора: Метаматематика – это ветер, надувающий паруса Метафизики. С ветром шутить опасно, его нужно всегда чувствовать, учитывать и уважать.

И у Давида Гильберта [8], и у Бертрана Рассела [6; 7] в их высказываниях о сущности современной математики, о её основаниях и строгости как точного знания постоянно присутствует мысль о наличии в ней неопределённых объектов – «вещей», требующих всё новых и новых интерпретаций. Символ веры – в том, что правила игры остаются неизменными, лишь время от времени усложняясь и совершенствуясь, но объекты, с которыми ведётся рассмотрение, – становятся абстрактными (у Гильберта, например, это могут быть столы, стулья и пивные кружки вместо точек, прямых и плоскостей).

Математика при этом начинает выглядеть как поле выдумывания новых игр по возможности с чёткими правилами. Так легко докатиться до безумия. Поэтому нужны чёткие ориентиры, рамки, границы и инварианты. Например, правила отбора и критерии; полноты, красоты, симметрии, простоты, наглядности.

Особенно ценной для нашего времени представляется греческая геометрическая наглядная парадигма, основанная на мироощущении и понятии движения. Сейчас опытные наставники в математике и физике рекомендуют представлять себе 4-мерный гиперкуб в виде движения его 3-мерной развёртки типа «крест», состоящей из 8 кубов, чтобы накладываясь, их 2-мерные грани исчезали как граница, отождествляемые, но с противоположными ориентациями.

То же делается для 3-сферы $\mathbf{S}^3$ и проективного вещественного пространства $\mathbf{RP}^3$, которые нельзя вложить изометрически в евклидово пространство $\mathbf{E}^3$ или в его арифметическую модель $\mathbf{R}^3$.

По-видимому, у древних греков было всё, чтобы идти дальше по такому пути, но этого не случилось, насколько сейчас известно из дошедших до нас источников.

В настоящей работе будет подчёркнута роль Евклидовых пространств всех размерностей в современных математике и теоретической физике, значение связанных с ними понятий: непрерывных и дискретных симметрий, движений, изометрий, вложений, погружений как фундаментального материала для уже не всех, но очень многих геометрических конструкций, без которых немыслимы ни понимание, ни дальнейшие работы в теоретической и математической физике, питающих своими достижениями и идеями и чистую математику. Приведем два весомых мнения по этому поводу.

Наш замечательный физик-теоретик, академик и Нобелевский лауреат Л.Д. Ландау при сдаче ему соискателями на поступление в школу Ландау поочерёдно всех 10 томов Курса теоретической физики всегда неожиданно подвергал их и экзамену по школьной математики, в основном геометрии. Всего соискателей было более 1100, а сдавших теорминимум – около 110 человек. Безжалостно изгонялись те, кто за три сдачи не смог ответить на все вопросы.

Другой факт: выдающийся математик современности, академик и лауреат многих наград и премий В.И. Арнольд постоянно повторял на заседаниях Московского математического общества: «Без геометрической интерпретации любого математического исследования и проблемы не может быть достигнуто их истинного понимания».

Часть II

1. Дошедшие до наших дней варианты основополагающего труда «Элементы» или называемые по-другому «Начала» Евклида вот уже свыше 2300 лет служат образцом геометрического подхода к описанию идеальных моделей окружающих нас объектов и явлений Природы. Этот энциклопедический итог работы математиков Александрийской школы на многие века определил стиль нашего Европейского мышления и понимания окружающего нас физического мира, ибо по-гречески «физеос» – это Природа.

2. Система знаний у древних греков была натурфилософской, то есть синтетической, вобравшей в себя и философию, и физику, и математику. Поэтому в основу геометрии кроме пяти весьма глубоко продуманных логически аксиом для точек, линий, плоских фигур и объёмных тел были заложены близкие к физическим понятия движения и конгруэнтности (совмещения вплоть до совпадения идеальных геометрических объектов, двигая их в пространстве, плюс, если надо, осуществляя преобразования подобия). Слово *Геометрия* у греков означало *Землемерие* в широком смысле, откуда были введены понятия кривых и поверхностей, объёмных тел, а также их пропорций и числовых мер. Греческая математика развивалась конструктивно и логически, опираясь на зримый опыт, что предопределило её успех как фундамента науки на все времена.

3. В течение многих веков предпринимались попытки превзойти и дополнить это каноническое синтетическое знание, но прогресс шёл медленно и неровно. Воображение не выходило за пределы наглядно осязаемого и наблюдаемого 3-мерного Евклидова пространства, в попытках иметь ясную геометрическую интерпретацию новых идеальных математических объектов.

4. Одним из переломных моментов стало изобретение Рене Декартом прямоугольных декартовых координат (у древних греков существование прямого угла являлось одной из аксиом) и появление аналитической геометрии. Это дало возможность индуктивно алгебраически и арифметически непротиворечивым путём перейти к не имеющим наглядной интерпретации высшим измерениям уже в XVII веке.

5. Затем активно стали использовать понятие ВЕКТОРА, оказавшееся психологически трудным: сейчас различают векторы, закреплённые в точке, векторы, скользящие вдоль линии, свободные векторы, мысленно параллельно переносимые в начало координат, аффинные векторы как пару

точек безотносительно к выбору начала отсчёта. Всё это неявно считалось погружённым или вложенным в Евклидово пространство, допускающее конгруэнции.

6. Уже в XIX веке Оливер Хевисайд завершил создание векторного анализа, придав ему современный вид. Этот век стал временем бурного расцвета геометрии и новых её идей. После открытий Карлом Фридрихом Гауссом, Яношем Бойяи и Николаем Лобачевским сферической, эллиптической и гиперболических неевклидовых геометрий, имеющих положительную и отрицательную постоянную кривизну и допускающих конгруэнтные сравнения, началась новая эра в математике, в том числе время переосмысления и систематизации всех накопленных знаний.

Настал черёд взяться за основу основ – обосновать в рамках математической логики существование и непротиворечивость Евклидовой геометрии, которую можно назвать параболической. Она выглядит как предельный случай пространства нулевой кривизны, по аналогии с коническими сечениями, известными и у Евклида, среди которых парабола – граница между непрерывными множествами эллипсов и гипербол.

Это обоснование было сделано многими математиками; Георгом Кантором (1874), Юлиусом Вильгельмом Ричардом Дедекиндом в 1876–1878 годах, группой сторонников Ренарда Больцано – к началу XX века. Эти сроки – во многом приблизительные, ибо понимание предмета складывается неравномерно, из бесед с коллегами, через подготовку и чтение лекций, при глубоких размышлениях и неожиданных озарениях.

7. Сначала требовалось уточнить и расширить понятия точки и прямой линии как линейно упорядоченного множества точек, в рамках арифметической модели вещественной прямой R. Чтобы её получить, потребовалась теория множеств Бернарда Больцано (1817) и затем три одновременные работы (1872):

1) Георга Кантора (фундаментальные последовательности, замыкания множеств и диагональный принцип),

2) Карла Вейерштрасса (десятичные бесконечные дроби и верные правила их отождествления с точками R, используя теорию пределов Огюстена Коши),

3) Ричарда Дедекинда (теория сечений как новый, оригинальный способ получения из множества рациональных чисел Q его расширения до R).

Во многих теоремах математического анализа, уточняющих и углубляющих известные ещё древним грекам определения иррациональных и трансцендентных чисел, проделана работа, закрывшая дыры в обосновании R.

8. В XX веке были созданы различные логические аксиоматические системы обоснования Евклидовой геометрии Дж. Биркгофом, Давидом Гильбертом (конструктивная логика), Альфредом Тарским (модальная логика); появились новые взгляды и подходы к самой математической логике. Кроме того, в настоящее время идёт работа по поиску новых аксиоматик евклидовых пространств в рамках многочисленных неклассических логик.

8.1. В связи с нуждами практических применений математики к описанию самого широкого круга явлений, процессов и систем не только в естественных, но и в гуманитарных науках, а также в обыденной жизни, стало необходимым задействовать самые глубокие, самые абстрактные и самые передовые её достижения. Это коснулось и отыскания новых способов расширить и пополнит вещественную прямую R.

Для удобства использования теории пределов её пополнили сначала двумя бесконечностями: $+\infty$ и $-\infty$. Затем, в другой модели, следующие из компактифицированной модели комплексных чисел, при стереографической проекции $S^2 \to C$, выбрали одну ∞ – северный полюс S^2 как предел любой неограниченной последовательности точек в $C \cup \{\infty\}$.

8.2. Применение математики во всё большем числе областей науки и жизни заставило расширять горизонты действия её понятий и категорий. Центральное место среди свойств действительных чисел R отводится понятиям непрерывности и предела, меры его подмножеств, дифференцируемости и интегрируемости структур над этим упорядоченным полем. Для этого были введены гиперреальные числа, супердействительные числа, сюрреальные числа. Это уже не просто множества, а представители класса, в который R должно входить строго. Опуская историю и подробности первых двух обобщений [8–10], резюмируя, за основу было принято топологическое Тихоновское $T_{3,5}$ пространство X и алгебра $C(X) = \{f\colon X \to K\} = K^X$ непрерывных функций на X над полем K, расширяющем R. Используя факторкольцо $A = C(X)/I$, где I – её простые идеалы P (для супердействительных чисел) или максимальный простой идеал M (для гиперреальных), можно получить поля f как поля частных для алгебры $A : F = (A)$.

8.3. Самое простое из них – гиперреальные числа – включает в себя нестандартный анализ, в котором строго реализованы идеи Евдокса и Г. Лейбница о добавлении бесконечных и бесконечно малых чисел, а вместо пределов вводится $st()$ – стандартные части.

8.4. Супердействительные числа включают в себя гиперреальные как более широкий класс. Потребности в них возникли для работы с Банаховыми алгебрами, в которых теперь решаются очень многие задачи современной математической физики. Это прямые и обратные задачи спектральной теории (интегро)дифференциальных операторов, устойчивость динамических систем, в частности задач квантовой механики и (квантовой) теории поля в конденсированных средах, описание диссипативных и нелинейных систем. Кроме того, супердействительные числа используют в теории полей, теории эргодических систем, для лексикографического упорядочения формальных степенных рядов (базисы Грёбнера, в которых решаются сложные алгебраические проблемы).

8.5. Супердействительные числа выступают как подмножества в множествах и подсистемах сюрреальных чисел. Название им придумал Дональд Кнут в 1974 году, хотя их предшественники были известны как формальные ряды Ханса Хана (1907), Π^{α}-множества Феликса Хаусдорфа, упорядоченное множество всех ординалов Нормана Аллинга [13], числа Конвея для теории игр [12], асимптотический анализ Мартина Крускала [15–18], ставший новым научным направлением под названием *Асимптотология*. Построение систем сюрреальных чисел производится сложными рекурсивными методами и по индукции [12–14]; пока не вполне удаётся в достаточной степени общности вводить определённые интегралы и справляться с другими проблемами.

8.6. Все вышеназванные расширения R формально производятся алгоритмизованными способами, и хотя они – непростые, требуют при практической реализации больших ресурсов, но позволяют продвинуться в глубь нового, неизведанного.

9. Ещё в XIX веке появились и другие важнейшие геометрии: проективная, комплексная, затем, в XX веке, симплектическая и кэлерова геометрии, конечная, контактная, лагранжева, фрактальная, финслерова геометрии и т.д.

10. Геометриям отвечают их геометрические структуры: пространства, движения, их инварианты и меры. И то и другое может иметь много разных реализаций, называемых моделями, отличающихся друг от друга, но имеющих то общее, что позволяет им называться одним именем – это изоморфизм структур.

11. Была выявлена важная связь между разными множествами, рассматриваемыми как топологические пространства, и группы, которые могут действовать на них нетривиально, являясь их симметриями. Старт был дан в Эрлагенской программе Феликса Клейна, а такая деятельность продолжается и сейчас.

12. Главное для нас заключается в том, что для надлежащей геометрической интерпретации все подобные конечные и конечномерные математические объекты МОГУТ быть вложены изометрически или погружены в Евклидово пространство достаточно высокой размерности. Там математики, а может быть, со временем и физики смогут детально рассмотреть и изучить буквально все их требуемые свойства.

13. Особо следует сказать о «геометриях» на римановых, псевдоримановых и иных искривлённых (супер)многообразиях и связанных с ними объектах: расслоениях, кобордизмах, гильбертовых, банаховых и других функциональных пространствах почти без симметрий, о многообразиях непрерывных или гладких, конечномерных и бесконечномерных, таких как слоения, на которых действуют бесконечномерные (псевдо)группы гомеоморфизмов или диффеоморфизмов, и другие сложные (псевдо)группы симметрий. В них главной наукой является скорее топология, чем геометрия. Здесь важны группы гомологий, когомологий, гомотопий, кобордизмов. Из них строятся вторичные и более высокого уровня абстрактные структуры, такие как характеристические классы, классифицирующие пространства, группы классов отображений, мотивы, производные категории, в которых есть даже объекты, не содержащие ни одной точки.

14. Одной из главных дисциплин и наиболее важным инструментом в современной математической и теоретической физике стала алгебраическая

геометрия, в которой мало собственно геометрии, но есть синтез достижений всей современной математики.

Литература

1. *Евклид.* Начала. Изд. 4. URSS. 2015. 752 с. ISBN 978-5-9710-1764-6.
2. *Омельяновский М.Э.* Проблема наглядности в физике // Вопросы философии. 1961. № 11.
3. *Омельяновский М.Э.* Диалектика в современной физике. М.: Наука, 1973.
4. *Омельяновский М.Э.* Развитие оснований физики XX века и диалектика. М., 1984.
5. *Фейнман Р.* Теория фундаментальных процессов / пер. с англ., сер. БТФ. Т. 1. М.: Наука, ГРФМЛ, 1978. 200 с.
6. *Russell Bertrand.* Mathematics and the metaphysicians // The world of mathematics / James Roy Newman (ed.) Reprint of Simon and Schuster 1956 ed. Courier Dover Publications, 2000. P. 1577. ISBN 0-486-41151-6.
7. *Russell Bertrand.* Introduction // Russel Bertrand. An essay on the foundations of geometry. Cambridge University Press, 1897. P. 1–5.
8. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
9. *Tall David.* Looking at graphs through infinitesimal microscopes windows and telescopes // Mathematical Gazette. March 1980. № 64 (427). P. 22–49. DOI: 10.2307/3615886
10. *Dales H. Garth, Woodin W. Hugh.* Super-real fields. Totally Ordered Fields with Additional Structure // London Mathematical Society Monographs. New Series no. 14. Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, NY, 1996. ISBN 978-0-19-853991-9.
11. *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? М.: Наука ГРФМЛ, 1987.
12. *Conway H. John.* On Numbers and Games. (2 ed.). CRC Press, 2000. ISBN 9781568811277; 2001, ISBN 1-56881-127-6.
13. *Alling Norman L.* Foundations of Analysis over Surreal Number Fields. 1987. ISBN 0-444-70226-1.
14. *Dries Van den, Lou, Ehrlich Philip.* Fields of surreal numbers and exponentiation // Fundamenta Mathematicae. Warszawa: Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences. 2001. 167 (2). P. 173–188. ISSN 0016-2736.
15. *Kruskal M.D.* Asymptotology Archived 2016-03-03 at the Wayback Machine // Proceedings of Conference on Mathematical Models on Physical Sciences. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall, 1963. P. 17–48.
16. *Barantsev R.G.* Asymptotic versus classical mathematics // Topics in Math. Analysis. Singapore e.a.: 1989. P. 49–64.
17. *Andrianov I.V., Manevitch L.I.* Asymptotology: Ideas, Methods, and Applications. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
18. *Dewar R.L.* Asymptotology – a cautionary tale // ANZIAM Journal. July 2002. № 44 (01). P. 33–40.
19. *Омельяновский М.Э.* Эйнштейн и философские проблемы физики XX века / Грибанов Д.П., Кузнецов Б.Г., Фок В.А. и др.; под ред. Э.М. Чудинова. 1979.

FROM THE METAPHYSICS OF EUCLIDES – TO GEOMETRIC IDEAS IN PHYSICS THROUGH THE AGE (GEOMETRIC IDEAS IN PHYSICS EXPAND THE HORIZONS OF THE KNOWLEDGE OF THE WORLD)

A.V. Khodunov

Federal Scientific Center Scientific Research Institute for System Research of the Russian Academy of Sciences
Cor. 1, 36, Nakhimovsky Pr., Moscow, 117218, Russian Federation

Abstract. This work consists of two parts. In the first part, a historical analysis is made with modern comments on the importance of a deep study of stable knowledge, experience and traditions of a geometric nature about the structure of the world accumulated by our civilization, which have passed thousands of years of testing. In addition to mathematics, in physics, the tradition of geometric research methods comes from Archimedes, through the work of Leonardo da Vinci, Galileo Galilei, René Descartes, Isaac Newton and other scientists. This trend is now stronger than ever. The second part briefly and summarizes the stages of how and what we have come to on this path.

Keywords: history of mathematics, Euclidean geometry, axiomatics, problems of modern physics, algebraic geometry.