

# Прикладная математика на рубеже XXI века

Г.Г.Малинецкий

Тем, кому предстоит развивать и применять математику в начавшемся веке, очень важно заглянуть в будущее и верно выбрать направление приложения своих усилий. Цель этих заметок – поделиться соображениями на этот счет.

Математики часто считают свою науку «вечной», следующей своей внутренней логике. Они с гордостью вспоминают о трех классических задачах Античности (удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга), которые были решены почти через двадцать веков после их постановки, или о проблемах Гильберта, ставших для многих исследователей ориентиром в XX веке.

Однако реальность меняется, а вместе с ней меняется математика. Научное творчество – диалог с коллегами, в том числе работающими в других областях, предшественниками и последователями. Поэтому много важного и интересного будет рождаться и происходить на границе и во взаимодействии с другими быстро развивающимися дисциплинами, с техникой.

Это подтверждают математические итоги XX века, подведенные выдающимся ученым академиком Владимиром Игоревичем Арнольдом [1]: «Вся математика делится на три части: криптография (оплачиваемая ЦРУ, КГБ и им подобными), гидродинамика (поддерживаемая производителями атомных подводных лодок) и небесная механика (финансируемая военными и другими организациями, типа НАСА, имеющими отношение к ракетам).

Криптография привела к созданию теории чисел, алгебраической геометрии над конечными полями, алгебры<sup>1</sup>, комбинаторики и компьютеров.

Гидродинамика породила комплексный анализ, уравнения в частных производных, теорию групп и алгебр Ли, теорию когомологий и методы вычислений.

Небесная механика дала начало теории динамических систем, линейной алгебре, топологии, вариационному исчислению, симплектической геометрии.

Существование таинственных связей между всеми этими различными областями – самая поразительная и прекрасная сторона математики (не имеющая никакого разумного объяснения).

Опыт прошедших столетий показывает, что развитие математики было обусловлено не столько техническим прогрессом (больше всего поглощавшим усилия математиков во все времена), сколько неожиданными открытиями взаимосвязей между ее различными областями (которые сделались возможны благодаря этим усилиям) ...

Сильвестр (1876) называл удивительным интеллектуальным феноменом тот факт, что *общие утверждения проще, чем их частные случаи*. Согласно Сильвестру *математическая идея не должна застывать в аксиоматической форме, а должна течь подобно реке*. Надо всегда быть готовым изменить аксиомы, сохраняя идею».

Каковы же те области, которые будут активно развиваться в XXI веке и порождать новые математические задачи?

Со школьных времен у большинства сохранилось субъективное ощущение, что математика – большая серьезная наука. Физика и химия и по объему, и по сложности примерно вдвое меньше. Биология тоже примерно вдвое «меньше», чем физика и химия.

Однако, чтобы судить о настоящей, «взрослой» науке, нужно опираться на объективные данные. Например, на индекс цитируемости различных научных дисциплин (см. рис. 1). Эта величина показывает, насколько велико и активно научное сообщество, развивающее данную область исследований. Если взять вместе молекулярную биологию,

---

<sup>1</sup> Создатель современной алгебры Виет был криптографом короля Генриха IV во Франции.

иммунологию, генетику – «потомков» школьной биологии, то характерный показатель цитируемости – 50, для химии около 10, для физики – 8, для математики и информатики примерно по 1,5. Картина совсем другая. Из нее следует, что XXI век будет веком биологии и наук о человеке.

Если в XIX и XX веке основными «заказчиками» и поставщиками математических проблем были физика, механика и криптография, то в XXI веке лидерами, которые будут ставить задачи, станут биология, экономика, социология, психология, история, география, робототехника, наука о материалах, нейронаука.

Науке XXI века предстоит научиться заглядывать в будущее, оценивать и предупреждать различные риски, на новом уровне понять сущность, возможности и ограничения людей и коллективов.

Жизнеобеспечивающие технологии, которые мы имеем сегодня (производство энергии, продовольствия, переработки (рециклинга) отходов, здравоохранения, управления, ряд других) позволяют поддерживать нынешний уровень потребления в течение нескольких ближайших десятилетий. Нам предстоит найти технологии, которые дадут возможность успешно развиваться человечеству хотя бы в течение нескольких веков. Очень большую роль предстоит сыграть в этом математике и *междисциплинарным подходам* (которые позволяют переходить от отдельных задач, решаемых различными научными дисциплинами, к большим, сложным, комплексным проблемам, требующим совместных усилий, а с другой стороны, опираясь на сходство или аналогию математических моделей, помогают увидеть общность различных явлений и процессов) [2].

В то же время имеет место и другая тенденция. То, что считалось передним краем науки и было результатом творчества выдающихся исследователей, становится со временем общим достоянием, затем используется в инженерной практике и попадает в институтские учебники.

Это можно проследить по работам Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН (ИПМ), созданного в 1953 году для решения стратегических задач, требующих компьютерного моделирования и использования методов прикладной математики [3].

Первыми задачами Института были следующие:

- Проблемы совершенствования ядерного оружия и создания водородной бомбы. В советском ядерном проекте участвовало более 800 тысяч человек, среди которых более 8000 исследователей. Реализация этого проекта потребовала создания атомной отрасли промышленности, которой руководило Министерство среднего машиностроения.

- Создание космических аппаратов и ракетной техники, баллистическое обеспечение запусков стратегических ракет, искусственных спутников, межпланетных полетов. Прорыв в космос потребовал усилий более 1,5 миллионов человек, более 1200 предприятий и создания Министерства общего машиностроения.

- Разработка и внедрение компьютерных систем управления сложными объектами и системами.

Первым директором нашего института был выдающийся математик, механик, организатор науки, «главный теоретик космонавтики», академик Мстислав Всеволодович Келдыш. Известна его дискуссия с выдающимся физиком, академиком Л.А.Арцимовичем. В историю вошла шутка последнего, о том, что «наука – способ удовлетворения личного любопытства за государственный счет». Он считал, что не так важно, какими проблемами заниматься, важно это делать на высоком уровне (научоведы сейчас называют это *ценностной ориентацией*). М.В.Келдыш полагал, что у науки должно быть несколько (приоритетов не бывает много) крупных, важных для общества задач, решение которых, в конечном счете, определит и направление теоретических поисков (*целевая ориентация*). История подтвердила правоту М.В.Келдыша.

Без преувеличения можно сказать, что в 1940-1950-х годах будущее мира решалось в лабораториях ученых. И на этом историческом рубеже отечественные исследователи успешно справились со стоящими перед ними задачами, причем в удивительно короткие, по нынешним меркам, сроки.

На этом пути была создана большая часть современной вычислительной математики, многие разделы дискретной математики, системное программирование, основы вычислительной геометрии (на которых строится вся компьютерная графика), теория конечных автоматов, алгоритмы распознавания образов и новые разделы теории управления, аэродинамики и небесной механики (связанные с роботами, проектированием и обеспечением авиационных и космических комплексов) и многое другое.

Реализация больших научно-технических проектов требовала математического моделирования (во многих случаях двигаться методом проб и ошибок слишком дорого или невозможно) и совместной работы математиков с ведущими специалистами, работающими в разных областях, усилий многих талантливых людей. И поэтому Институт оказывался в центре важнейших проектов, становился своеобразным системным интегратором.

По-видимому, время больших проектов, обеспечивающих взлет нашего отечества и математики, не только в прошлом, но и в будущем.

## УРОКИ XX ВЕКА

С омерзением и ужасом я отворачиваюсь от этой злой и вредной язвы – непрерывных функций, нигде не имеющих производных.

*Эрмит, в письме к Стильтьесу.*

Академик Яков Борисович Зельдович – выдающийся физик, один из создателей ядерного оружия, специалист по космологии, химической кинетике, квантовой механике, предложивший свое видение высшей математики, прикладной математики и математической физики [4], будучи сотрудником ИПМ, заложил основы *космомикрофизики*. Более 40 лет назад он показал, что эпохе гигантских ускорителей сравнительно скоро придет конец, и что свойства нашей вселенной и ее развитие в первые мгновения после Большого взрыва определяются тонкими свойствами элементарных частиц – мельчайших кирпичиков материи. И напротив, – свойства элементарных частиц придется очень скоро изучать, только решая обратные задачи. Эти свойства надо будет восстанавливать на основе наблюдаемого состояния космоса. В роли гигантского ускорителя, намного превосходящего все, что может быть создано людьми, выступит сама вселенная. И действительно, и астрофизика, и физика элементарных частиц пошли во многом именно по этому пути, намеченному Я.Б.Зельдовичем.

Однако в этой дерзкой идее есть и прямая аналогия и с рождением больших проектов, и с развитием математики. Очень часто все начинается с небольшой, конкретной, иногда кажущейся странной задачи.

Вспомним математическую революцию конца XIX века, заставившую всерьез отнестись к доказательствам существования и единственности исследуемых объектов и установившую намного более высокие, чем раньше, стандарты строгости рассуждений.

Великий Эйлер сделал удивительно много в математике и механике, от доказательства, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке до основополагающих уравнений гидродинамики, от основ теории функций комплексного переменного до замечательных результатов математического анализа и теории чисел. Привычные нам обозначения  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\ln$ ,  $e$ ,  $\pi$  в мире часто называют «петербургскими символами», так как он ввел их, работая в Санкт-Петербурге, в Академии наук, одновременно с

Михаилом Васильевичем Ломоносовым. Во многом судьба М.В.Ломоносова, вклад которого в науку и культуру России трудно переоценить, сложилась благодаря активной поддержке Леонарда Эйлера.

Этот выдающийся математик полагал, что надо делать выкладки и получать результаты, оставив их обоснование, говоря современным языком, на долю не слишком способных аспирантов.

В течение многих лет Лагранжа и многих других выдающихся математиков волновала «небольшая задача» – доказательство того, что, говоря современным языком, непрерывная функция, заданная на отрезке, является дифференцируемой почти всюду. Многолетние неудачи заставляли думать, что с этой задачей не все так просто.

И наконец К.Вейерштрасс (1815-1897) построил контрпример – функцию, которая определяется суммой ряда

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad 0 < a < 1, \quad b > 1, \quad ab > 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Поскольку этот ряд мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем меньшим единицы, то из классических теорем математического анализа следует, что функция  $W(x)$  непрерывна на отрезке. Однако К.Вейерштрассу удалось доказать, что при некоторых значениях параметров  $a$  и  $b$  производная функции  $W(x)$  не существует ни в одной точке отрезка (позже было показано, что для этого достаточно, чтобы  $0 < a < 1$ ,  $ab > 1$ ).

Этот и несколько других контрпримеров вызвали шок и переоценку ценностей – мало найти формальное решение или выписать его в виде ряда. Надо доказать, что оно существует, единственно и лежит в том пространстве, в котором мы его ищем.

Математики утешали себя тем, что придуманные ими «монстры» не встречаются в природе. Но к реальности оказался гораздо ближе взгляд Альберта Эйнштейна, считавшего, что природа представляет собой реализацию простейших математических конструкций (какими бы экзотическими они не казались вначале, можем мы добавить сегодня).

В самом деле, вскоре после работ К. Вейерштрасса Жаном Батистом Перреном было исследовано броуновское движение. При этом траектория частиц описывалась не дифференцируемой функцией, а извилистой ломаной, повторяющей себя на все меньших масштабах (или, говоря современным языком, обладающей *масштабной инвариантностью*). А после работ французского математика Бенуа Мандельброта стало ясно, что исследование Вейерштрасса положило начало изучению замечательных геометрических объектов – *фракталов*, что мир полон ими и надо разбираться в их свойствах, механизмах возникновения и способах использования [5, 6]. Сейчас эти объекты применяются в задачах диагностики, прогноза, в компьютерной графике, при решении проблем сжатия информации, в технологиях повышения нефтеотдачи пластов, в географии.

Новое рождается на границе нашего незнания, представляясь «странностью», «частным случаем», «математической экзотикой».

В полной мере это относится и к задачам, которые не являются корректными. Под знаком их изучения и решения и прошла значительная часть всех исследований в прикладной математике XX века.

В конце XIX века в центре внимания ученых оказались уравнения в частных производных. Стало понятно, что одни краевые задачи «хороши», содержательны и с физической, и с математической точки зрения, а другие обладают скрытыми пороками. Например, задача Коши для уравнения колебаний струны

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

прекрасно описывает распространение колебаний и успешно решается различными математическими методами. А похожая по виду задача для уравнения Лапласа

$$u_{tt} + u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

неустойчива по отношению к возмущению начальных данных. Как бы не были малы возмущения, решение при этих начальных данных может быть сколь угодно далеко от исходного. И если такая задача возникает при построении теории, то надо искать существенные факторы, которые не были учтены при создании математической модели.

Исходя из множества подобных примеров, Жаком Адамаром (1865-1963), было введено понятие *корректности задачи математической физики*. К таковым он предложил относить те задачи, решения которых *существуют, единственны, устойчивы* относительно начальных данных, краевых условий и параметров, входящих в задачу. То, что не является корректным, либо находится на краю того, что нужно изучать, либо за краем. И именно в этой области произошли многие важнейшие события прикладной математики XX века.

*Существование.* Приведем «школьный» пример задачи, решение которой не существует в целом – при  $0 < t < \infty$

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad x(0) = a. \quad (1)$$

Его решение  $x(t) = \frac{1}{t_f - t}$ , где  $t_f = \frac{1}{a}$ . Это решение относится к классу так называ-

емых *режимов с обострением*, в которых одна или несколько характеристик системы неограниченно возрастают за конечное время, называемое *временем обострения*.

Оказалось, что именно такие решения описывают множество неустойчивостей в гидродинамике, физике плазмы, экологии, в лазерной термохимии. Такая динамика является типичной асимптотикой в системах с сильной положительной обратной связью. Теория режимов с обострением, построенная в научной школе третьего директора ИПМ, член-корр. РАН, моего учителя, Сергея Павловича Курдюмова (1928-2004), получила мировое признание [7].

Более того, именно по гиперболическому закону вида (1) в течение сотен тысяч лет росла численность населения Земли  $N(t)$ , где  $t_f \approx 2025$  год. Этот важнейший для демографии, истории, социологии, экономики и множества других дисциплин, для всех нас, факт был осознан в последние десятилетия. Это произошло во многом благодаря построенной профессором Сергеем Петровичем Капицей *глобальной демографической теории* [2] и деятельности по ее популяризации.

Данные палеодемографии, системный анализ и простейшая математическая модель позволили осознать масштаб того перелома на котором находится человечество.

Изменение этой асимптотики, резкое уменьшение скорости роста числа людей на планете, происходящее в течение жизни одного поколения получило название *глобального демографического перехода* (см. рис. 2). Это переход от стратегии «высокая рождаемость – высокая смертность» к стратегии «низкая рождаемость – низкая смертность». Именно этот переход, который помогла «замечить» прикладная математика, является главным содержанием нынешней эпохи. Отличие нынешней траектории от асимптотики, определявшей развитие человечества в течение сотен тысяч лет и являвшейся главной

«пружиной» истории, уже составило более 2-х миллиардов человек. Причины глобального демографического перехода являются предметом активных исследований.

Многолетние безуспешные попытки доказать существование решений фундаментальных задач могут быть признаком замечательных физических явлений. Трудности, связанные с доказательством существования ряда решений обратных задач теории дифракции, в течение многих лет относились на счет несовершенства используемых математических инструментов. Однако оказалось, что это ключ к *метаматериалам*, которые сделали реальным воплощение сказки о «шапке-невидимке» или «эльфийском плаще». В школьном курсе физике проходят закон преломления света

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – углы падения луча,  $n_1$  и  $n_2$  – показатели преломления. Оказалось, метаматериалы позволяют сделать показатель преломления одной из сред отрицательным! И это дает удивительные возможности. Свет, распространяясь по системе, состоящей из обычных и метаматериалов, огибает тот предмет, который мы хотим скрыть.

*Единственность решения.* Классическим примером неединственности является задача

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/2}, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Кроме тривиального решения  $x(t) = 0$  она имеет решение  $x(t) \sim t^2/4$  (теорема единственности, которая приводится в институтских курсах дифференциальных уравнений, при  $x = 0$  неприменима, так как в этом случае не выполняется условие Липшица).

Одним из центральных понятий математики XX века стало понятие *бифуркации* – изменения числа и устойчивости решений определенного типа при изменении параметров исследуемой задачи.

Оказалось, что, во-первых, в системах различной природы возникают *одни и те же бифуркации*. Во-вторых, *их число невелико*. Во многих случаях эту «неединственность» удалось расклассифицировать. Например, это сделано в теории катастроф для динамических систем вида

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U(x, \lambda_1, \dots, \lambda_p)}{\partial x}.$$

До тех пор, пока число параметров невелико ( $p \leq 5$ ), все типичные бифуркации или «неединственности» определяются 7 «каноническими» катастрофами [8], а затем возникают принципиальные трудности – «канонические» формы начинают зависеть от непрерывного параметра и «типов катастроф» становится бесконечно много.

Одним из основных достижений нелинейной динамики в XX веке стало выявление *универсальных сценариев возникновения хаоса* – последовательности бифуркаций, приводящей к переходу простейших упорядоченных, периодических, регулярных режимов к нерегулярным, хаотическим [9].

В течение трехсот лет физики, механики, математики решают проблему турбулентности. В простейшем варианте она сводится к тому, чтобы выяснить, описывает ли классическая модель гидродинамики – уравнения Навье–Стокса – те хаотические движения жидкости, которые наблюдают физики, или нужно нечто сверх этих уравнений (например, малые случайные силы и т.д.). В прошедшем веке математикам не удалось доказать существование и единственность решений этой задачи в трехмерных областях.

В нескольких списках «задач тысячелетия» эту проблему относят к одной из самых фундаментальных в современной математике. И многие специалисты склоняются к мысли, что, по крайней мере для многих классов «разумных» начальных данных, эти решения не существуют или неединственны.

Неединственность характерна для обратных задач прикладной математики. Разработка методов решения обратных и некорректных задач, огромный вклад в которую внесла научная школа второго директора ИПМ академика Андрея Николаевича Тихонова, стала одним из фундаментальных достижений математики XX века.

Однако подлинным героем, одной из центральных «фигур» математики XX века стала *неустойчивость*. На рубеже прошлого столетия выдающимся французским математиком Анри Пуанкаре (1854–1912) была выдвинута исследовательская программа, связанная с анализом *нелинейных динамических систем*.

Отличительной чертой таких систем является *отсутствие принципа суперпозиции*. Если условно записать изучаемую задачу в виде  $Lu = 0$ , то для нелинейных систем

$$L(u_1 + u_2) \neq L(u_1) + L(u_2).$$

Поэтому «сшить» общее решение из частных, как это делают студенты, решая большинство задач по университетским курсам математической физики и дифференциальных уравнений, не удастся.

Большинство математиков конца XIX века надеялись, что введение новых специальных функций и поиск решений в виде сходящихся рядов поможет справиться с задачами, возникающими при математическом моделировании механических систем и физических процессов. Пуанкаре выдвинул принципиально новую исследовательскую программу. Ее главными моментами стали [10].

*Исследование притягивающих множеств – аттракторов* (от английского to attract – притягивать) в фазовом пространстве, которые описывают установившиеся на больших характерных временах режимы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Упрощение состоит в том, что множество различных систем может иметь *одни и те же аттракторы*, и в том, что в системах небольшой размерности  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $p \leq 2$  типов аттракторов *всего несколько*, а также в том, что с целых классов начальных данных происходит выход на *одни и те же* притягивающие множества.

– *Качественная теория динамических систем*, выяснение того, какие свойства сохраняются (остаются инвариантными), а какие меняются при возмущениях, принадлежащих к определенному классу (на этом пути было введено очень важное понятие *грубости* динамических систем).

– *Исследование бифуркаций*.

– *Привлечение геометрических идей в эту область*, исследование геометрии фазового пространства динамических систем. Из этих работ, которые А.Пуанкаре называл «геометрией положения», выросла – топология – одна из основ современной математики.

– *Асимптотический анализ*.

До Пуанкаре во многих областях и, прежде всего, в задачах небесной механики рассматривали уравнения вида

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) + \varepsilon \vec{g}(x)$$

и искали их решения в виде рядов

$$\tilde{S}_N(\varepsilon, t) = \sum_{n=0}^N \tilde{x}_n(t) \varepsilon^n,$$

где  $\tilde{x}_0(t)$  – некоторое известное решение, а остальные члены ряда определяют поправки к нему. Считалось, что имеет смысл рассматривать только такие ряды, в которых

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\tilde{S}_N(\varepsilon, t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{S}_N(\varepsilon, t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0.$$

Большие усилия вкладывались в доказательства сходимости этих рядов (второго из выписанных выше неравенств). Образно говоря, «хвост вилял собакой».

А. Пуанкаре предложил рассматривать ряды, которые обладают иными свойствами:

$$\|\tilde{S}_N(\varepsilon, t) - \tilde{x}(t)\| \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, N = N^*.$$

Иными словами, мы берем «разумное» число членов ряда  $N^*$ , не обращая внимания на «хвост». Эта идея оказалась очень важной и конструктивной. Она без преувеличения, преобразила асимптотический анализ [12].

Итак, в асимптотических рядах, которые могут не сходиться, надо найти то число членов  $N^*$ , которое дает наилучшее приближение. И здесь показательны физические теории. Квантовая электродинамика последовательно описывает взаимодействие микрочастиц с электромагнитным полем, которое тоже рассматривается как квантовая система. За создание этой теории Р.Ф. Фейнман, Д.С. Швингер и С. Томонага были удостоены Нобелевской премии по физике за 1965 год. Ее предсказания с удивительной точностью (в 8 значащих цифр) совпадают с экспериментом. Малым параметром в этой теории, которая является асимптотической, является постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ , где  $e$  – заряд электрона,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света. Для этой теории глубокие содержательные уравнения получаются, если взять  $N^* = 1$ , учет следующих членов порождает расхождений, анализ и осмысление которых потребовали больших усилий от физики.

Схожим образом дело обстоит и в гидродинамике. Людвиг Больцман на рубеже XX века предложил уравнение, описывающее изменение плотности вероятности найти частицу в данной точке пространства координат и импульсов. Позже оказалось, что разложив по малому параметру и рассматривая моменты соответствующих распределений вероятности, взяв  $N^* = 1$ , мы получаем классические уравнения гидродинамики. Однако, уже при  $N^* = 2$ , как показал сотрудник ИПМ А.В. Бобылев, мы получаем уравнения, некорректные с точки зрения математической физики. Мораль понятна – используя асимптотические ряды, очень важно знать, когда следует остановиться.

Перенос акцента с аналитического или численного нахождения интегральной кривой динамической системы  $\tilde{x}(t)$ , на изучение аттракторов кардинально изменил отношение к устойчивости. Суть дела иллюстрирует простейший пример

$$\dot{x} = ax, \quad x(a) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad a > 0.$$



Решение этого уравнения с начальными данными  $x(0)=\delta$  – экспонента  $x(t)=\delta e^{at}$ . Вспомним  $\varepsilon$ – $\delta$  определение устойчивости. Чтобы траектория на интервале  $0 \leq t \leq \tau$  была устойчива по начальным данным, нужно указать для любого малого  $\varepsilon$  такое  $\delta$ , что возмущение начальных данных на  $\delta$  не выведет возмущенную траекторию  $\tilde{x}(t)$  из  $\varepsilon$ -трубки, построенной вокруг исходной траектории  $x(t)$

$$\|x(t)-\tilde{x}(t)\| < \varepsilon \text{ при } 0 \leq t \leq T,$$

если  $\|x(0)-\tilde{x}(0)\| < \delta$ .

Зададим  $\varepsilon$ . Пусть  $\delta e^{aT} < \varepsilon$ , для этого возьмем  $\delta < \varepsilon e^{-aT}$  (тогда и для всех  $0 \leq t \leq T$  будет  $\|\tilde{x}(t)-x(t)\| < \varepsilon$ ,  $x(t)=0$ ). Траектория  $x(t)$  для этой динамической системы устойчива на интервале  $0 \leq t \leq T$ . Конечно, чем больший интервал нас интересует, тем меньшее значение  $\delta$  при данном  $\varepsilon$  надо брать. Однако если  $T=\infty$ , то такого значения  $\delta$  просто не существует! Траектория  $x(t)=0$  оказывается неустойчива  $|x(t)| \rightarrow \infty$  при любом  $\delta \neq 0$ .

Это кажется естественным и очевидным – возмущенные траектории уходят на бесконечность. Устойчивость на конечном и бесконечном промежутках здесь принципиально различаются.

В рассмотренном случае неустойчивые траектории уходили на бесконечность. Но ведь для других систем они могут оставаться в ограниченной части фазового пространства, а сам аттрактор представлять собой множество *неустойчивых* по каким-то направлениям траекторий. Это понимание стало основой для революции в теории динамических систем, связанной с открытием *странных аттракторов* и *динамического хаоса*.

Простейший пример, поясняющий принципиальную роль неустойчивости, дает отображение (его называют «палаткой», «тентом» или отображением Неймана)

$$x_{n+1} = 1 - 2|x_n| \equiv f(x_n), \quad x_1 = a, \quad -1 \leq a \leq 1.$$

Очевидно (см. рис. 3), это отображение переводит отрезок  $[-1; 1]$  в себя: если  $-1 \leq x \leq 1$ , то  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .

Пусть для исходной траектории  $\{x_n\}$  начальные данные  $x_1 = a$ , для возмущенной траектории  $\{x'_n\}$  –  $x'_1 = a + \delta$ . Будем считать – если  $x_n$  принадлежит правой или левой ветви отображения, то и  $x'_n$  принадлежит той же ветви (модуль для них раскрывается одинаково). Это так, пока траектории достаточно близки.

Зададим значение  $\varepsilon$ . Проследим за траекторией  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$

$$|x_1 - x'_1| = \delta, \quad |x_2 - x'_2| = 2\delta, \quad |x_3 - x'_3| = 4\delta, \dots, |x_n - x'_n| = 2^{n-1}\delta.$$

Отсюда следует, что при  $n > \log_2(\varepsilon/\delta) + 1$  траектории при данном  $\delta$  разойдутся больше, чем на  $\varepsilon$ , а поскольку нас интересует аттрактор  $n \rightarrow \infty$ , то и об устойчивости любой траектории  $\{x_n\}$  для этого отображения говорить не приходится.

Джон фон Нейман рассматривал это отображение как генератор случайных чисел для метода Монте-Карло. Этот метод завораживал не одно поколение математиков.

Будем считать, что мы рассматриваем не одну динамическую систему, а бесконечное множество таковых. Пусть распределение начальных данных для них имеет

плотность  $\rho(x_1)$  или меру  $\mu(x_1)$ . После первой итерации плотность и мера изменятся  $\rho(x_2)$  и  $\mu(x_2)$ .

Спросим себя, когда мера не будет меняться с течением дискретного времени ( $n = 1, 2, \dots$ ). Уравнение для такой меры (которую называют *инвариантной*) очевидно

$$\mu(x) = \mu(f^{-1}(x)),$$

где  $f^{-1}(x)$  – все прообразы точки  $x$ .

Естественно думать, что именно инвариантная мера и характеризует аттрактор. Решение уравнения для одной из инвариантных мер для «тента» –  $\rho(x) = 1/2$  при  $-1 \leq x \leq 1$ . То есть наше отображение переводит равномерное распределение прообразов  $\{x\}$  в равномерное распределение образов  $\{f(x)\}$ .

Это отображение удивляет и порождает иллюзию, что «тент» является хорошим генератором случайных чисел.

Имея хороший генератор, можно делать очень многое. Очевидный пример. Пусть нам надо посчитать объем тела  $G$  в  $p$ -мерном пространстве ( $p \gg 1$ ). Пусть для простоты  $G$  принадлежит кубу ( $0 \leq y_1 \leq 1, \dots, 0 \leq y_p \leq 1$ ), и мы можем определить, попала ли точка внутрь этого тела или нет.

Дальнейшая стратегия такова. Располагая случайными числами  $\{x_n\}$ , мы формируем случайные  $p$ -мерные векторы  $\vec{y}_1 = (x_1, \dots, x_p)$ ,  $\vec{y}_2 = (x_2, \dots, x_{p+1})$ ,  $\dots$ ,  $\vec{y}_p = (x_n, \dots, x_{n+p})$ , определяющие координаты случайных точек в  $p$ -мерном пространстве.

Строим  $M$  таких векторов. Пусть  $M_{in}$  из них задают точки, попавшие внутри тела  $G$ . Тогда для объема тела  $V(G)$  получаем оценку

$$V(G, M) = M_{in} / M.$$

Очевидно,  $V(G, M) \rightarrow V(G)$  при  $M \rightarrow \infty$ .

Наличие «хороших» случайных чисел является критичным в криптографии. В идеальном случае, зная всю выборку сгенерированных ранее случайных чисел  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  мы не можем предсказать  $N+1$  число. Чем лучший генератор используется, тем труднее расшифровать перехваченное сообщение.

Генератор, задаваемый «тентом», не хорош. В самом деле, пусть начальное значение  $x_1$  ( $-1 \leq x_1 \leq 1$ ) – рациональное число  $x_1 = P/Q$ , где  $P$  и  $Q$  – целые. Но тогда, посмотрев на отображение, мы увидим, что и  $f(x_1)$  также имеет вид  $P/Q$  с тем же знаменателем  $Q$ , но таких чисел на отрезке  $[-1; +1]$  всего лишь  $2Q+1$ . Поэтому с рациональных данных вида  $P/Q$  мы не более, чем за  $2Q+1$  итераций попадем в цикл (числа в последовательности  $\{x_n\}$  будут повторяться), и о случайности здесь говорить не приходится.

Однако используются, предлагаются и будут изучаться более совершенные генераторы – по-видимому, их разработка стала одной из «вечных проблем» вычислительной математики [13, 14].

Понадобилось почти 20 лет, чтобы от «тента» и методов Монте-Карло перейти к исследованию динамических систем с непрерывным временем.

Пионерская работа была выполнена американским метеорологом Эдвардом Лоренцем в 1963 году. Этого ученого заинтересовало, почему несмотря на грандиозный прогресс компьютеров и совершенствование систем мониторинга исследователям не

удается получить среднесрочный (на 2-3 недели) прогноз погоды. У него возникла гипотеза, что дело не в существовании решений соответствующих уравнений, не в эффективности алгоритмов и быстродействии компьютеров, а в самой природе изучаемого явления.

В большой степени погода определяется конвективными процессами в атмосфере. Массы холодного воздуха из верхних слоев опускаются вниз, прогреваются, плотность их падает, и они поднимаются вверх, чтобы уступить свое место более тяжелым и холодным массам.

Конечно, чтобы описать такую конвекцию, можно было бы решать трехмерные уравнения газовой динамики с учетом теплопереноса. Однако Э.Лоренц рассмотрел простейший двумерный вариант, воспользовался методом Галеркина и получил простейшее приближение, учитывающее всего три гармоники поля скоростей и температур

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\delta x + \delta y \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

Далее эту систему, называемую ныне системой Лоренца, он проинтегрировал на компьютере. И оказалось, что сколько бы ни наблюдали за решением, оно не становится периодическим (см. рис. 4). Кроме того, расстояние между исходной траекторией  $\bar{S}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  и возмущенной  $\bar{S}'(t)$  растет  $d(t) \sim \delta \exp(\lambda t)$ ,  $\lambda > 0$ .

Иными словами, аттрактор (притягивающее множество) динамической системы определяется неустойчивой траекторией! По данным наблюдений за возмущенной системой  $\bar{S}'(t)$  мы можем судить о состоянии исходной системой лишь если  $\lambda t < 1$ , то есть

$$t < T = 1/\lambda,$$

до некоторого *горизонта прогноза*  $T$ . Следовательно, мы имеем здесь в точности ту же ситуацию, с которой математики столкнулись, рассматривая отображение Неймана. И «горизонт прогноза» для атмосферы, судя по оценкам, которые были сделаны позже, оказался равным именно тем 2-3 неделям, за которые никак не удавалось заглянуть метеорологам.

От удачной остроты шута мог зашататься королевский трон. И точно так же исследование модели Лоренца и открытие динамического хаоса – странных аттракторов, (описывающих установившееся периодическое движение в динамических системах) изменило наш взгляд на мир.

В самом деле, выдающийся математик и механик И. Ньютон мыслил себе мир как гигантский часовой механизм, который создал и запустил бог. В этом мире нет места для случайности и свободы воли.

Его последователь Пьер Симон Лаплас, живший в наполеоновскую эпоху (вспомним уравнение Лапласа, преобразование Лапласа, лапласиан ...) считал, что не нуждается в гипотезе бога. По его мысли, ум, который смог бы учесть координаты и скорости всех частиц во вселенной и для них решить уравнения Ньютона, мог бы заглянуть как угодно далеко в будущее и прошлое. И вновь все предопределено и мы с вами – всего лишь актеры, исполняющие роли в уже написанной пьесе, которую не можем изменить. Это взгляд философов называют *лапласовским детерминизмом*.

Модель Лоренца и прикладная математика показали, что Лаплас был неправ, позволили спуститься с небес на землю. В самом деле, любое измерение выполняется с некоторой конечной точностью  $\delta$ . Однако если для нашей системы величина  $\lambda > 0$  и имеет место конечный горизонт прогноза  $T = 1/\lambda$ , то заглянуть дальше него мы не сможем, как бы успешно не моделировались изучаемые процессы и не решались получившиеся уравнения. (Величину  $\lambda$  называют *ляпуновским показателем*.)

С одной стороны, вывод грустный – мы добавили еще одно ограничение к известным. В самом деле, механика показала неосуществимость вечного двигателя первого рода (производящего работу без затрат энергии), термодинамика – второго рода (осуществляющего передачу тепла от холодного тела к горячему без изменения окружающей среды), теория относительности утверждает, что нельзя передавать информацию со сверхсветовой скоростью, квантовая механика с ее принципом неопределенности заставляет забыть о бесконечно точном одновременном измерении скорости и координаты микрочастицы.

С другой стороны, результат очень оптимистичен. В самом деле, очень мало изменив состояние системы (на  $\delta$ ), мы можем через время  $T$  перевести ее в совершенно другое положение. Взмах крыльев бабочки в нужное время в нужном месте может привести через пару недель к разрушительному урагану за тысячи километров от нее. Иными словами, бабочка, как и мы с вами, является творцом реальности, а не шестеренкой в гигантском часовом механизме. И это коренное изменение взгляда на мир связано с исследованием и осмыслением довольно простых математических моделей.

## ТВОРЧЕСКАЯ РОЛЬ МАТЕМАТИКИ

Самые удивительные сказки – те, которые придумывает жизнь.

*Г.Х. Андерсен*

Очень часто мы смотрим на математику так же, как во времена Евклида: изобретательность и настойчивость позволяет придумывать и решать замечательные задачи, при необходимости прочерчивая путь от желаемого результату к исходным данным.

Мы склонны не замечать грандиозных перемен, кардинально изменивших математическую реальность. «Первой ласточкой» была «воображаемая геометрия», построенная Н.И. Лобачевским, и последовавший за ним набор других неевклидовых теорий. Некоторые из них удивительным образом отличаются от привычного евклидова мира. Например, сумма внутренних углов треугольника на сфере может быть  $270^\circ$ ...

Эти размышления имели такое влияние на умы математиков, что Карл Гаусс занимался триангуляцией (съемкой местности), чтобы посчитать сумму внутренних углов и экспериментально проверить, какая геометрия лучше описывает нашу реальность.

Евклидов мир и схемы рассуждений, которые были описаны еще Аристотелем, казались незыблемыми. Но так ли это? «Брадобрей бреет всех, кто не бреется сам. Бреет ли он себя?» И положительный, и отрицательный ответ здесь нехороши. Этот и другие парадоксы начала века показали – что-то не так с самой логикой и схемой построения математических теорий. Разных «математик» становилось все больше – нестандартный анализ, неархимедовы теории, некоммутативный анализ...

Если до XX века исследователи, проводя рассуждения, имели надежду разобраться «как же все устроено на самом деле», то сейчас произвола и свободы творчества стало намного больше. «В одних теориях это так, а в других совсем иначе», – все чаще можно услышать в ответ, – «Выбирайте, что вам больше подходит». Так же как Алиса в сказке Кэрролла, оказавшись в Зазеркалье, математики увидели много разных миров, среди ко-

торых можно либо выбрать свой, самый уютный и красивый, и провести в нем жизнь, либо создать иной, либо скитаться, переходя из одной математической вселенной в другую ...

Посмотрим на развитие большинства наук: *Удивление → поиски и идеи → отдельные задачи и эксперименты → теории → возможности приложений результатов → выход на технологии, инженерные решения, отрасли промышленности*. Никого не удивляет, что эта схема относится к аэродинамике, превратившейся за столетие из фундаментальной науки в ремесло, к органической химии, оптике, ко многим другим наукам, породившим технологии.

Однако точно то же относится и к математике! Путь от классической логики через идеи Тьюринга, Поста, Черча к системному программированию, а от них к созданию огромной отрасли промышленности, занятой производством компьютеров и разработкой программ, оказался пройден удивительно быстро.

Развитие абстрактных математических, вначале «вычислительных», идей открыло путь человечеству в виртуальную реальность. Наряду со специалистами по компьютерным наукам (computer science) в западных университетах готовят компьютерных инженеров (computer engineering). И масштаб, и значение этой отрасли оказались очень велики. В настоящее время Индия экспортирует программное обеспечение на 40 миллиардов долларов в год. Это всего лишь в два с небольшим раза меньше, чем стоимость экспорта российской нефти и в 5 раз больше, чем цена экспорта российского оружия.

Способность страны производить надежное и эффективное программное обеспечение является очень важной, становится стратегическим фактором. Например, программа полномасштабной системы противоракетной обороны и «звездных войн», провозглашенная Рональдом Рейганом, по счастью, не была реализована (щит и меч следует рассматривать в комплексе). Причин для этого было несколько, но одной из ключевых стало осознание, что создание соответствующего программного комплекса потребовало бы нескольких миллионов человеко-лет работы квалифицированных программистов.

В связи с развитием компьютерной промышленности и программной индустрии возникает множество новых и необычных задач, о которых стоило бы рассказать отдельно.

Однако весьма возможно, мы станем свидетелями и участниками создания еще одной гигантской отрасли, сравнимой по масштабу с компьютерной индустрией, в основе которой лежит ряд математических идей. Эту отрасль можно назвать «когнитивной промышленностью» [15].

В самом деле, компьютеры помогают нам сегодня вычислять, обеспечивать связь, осуществлять заказ билетов, решать задачи логистики и, конечно, развлекаться. Однако их роль в принятии решений, в анализе и осмыслении доступной нам информации, в движении и проверке гипотез пока остается очень малой. Мы смогли поручить им лишь наиболее простую и хорошо формализованную часть интеллектуальной работы.

Если нам не удастся добиться большего, то это может оказаться одним из ключевых препятствий на пути прогресса. В самом деле, человек в состоянии следить всего за 5-7 медленно меняющимися параметрами. Принимая решение, он сможет учесть лишь 5-7 факторов. Наконец, содержательно, по существу, он может взаимодействовать только с 5-7 людьми (с остальными опосредованно или действуя стандартно).

Во многих случаях этого недостаточно. Надо понять, какие технологии выявления закономерностей, обучения, распознавания образов (все это называется *когнитивными технологиями*) использует человек, и научить этому компьютеры.

Судя по всему, основы для этого уже заложены. Множество примеров здесь дают задачи медицинской диагностики. Судя по учебникам, постановка диагноза многих заболеваний требует учета более 400 симптомов, результатов анализов, факторов. Человек

не мыслит в пространствах такой размерности и, тем не менее, во многих случаях действует крайне успешно.

Каковы же его «решающие правила» – итог его профессиональной деятельности? Во множестве случаев врач сам их не осознает, они остаются «скрытым», «интуитивным» знанием. В научной школе сотрудника ИПМ, академика И.М.Гельфанда, были созданы алгоритмы, позволяющие выявить это знание, научить ему компьютер и сделать достоянием всех [16]. По-видимому, очень скоро компьютеры станут намного более «толковыми» помощниками, чем сейчас.

Однако одна из самых удивительных черт математики – это возможность придумывать и вводить удивительные объекты, которые со временем начинают преобразовать реальность. Эйнштейн подчеркивал универсальность математики как инструмента физика. Один из создателей квантовой механики – Е. Вигнер обращал внимание на ее непостижимую эффективность в естественных науках. Академик В.И. Арнольд вообще считал ее частью физики. Но мы сейчас можем осознать, что это инструмент является не только средством для понимания, но и для преобразования, конструирования реальности.

Классикой в этом отношении стала машина Тьюринга. Модель выполнения *любой* формализованных алгоритмов оказалась удивительно простой – бесконечная лента с написанными символами 0, 1 и знаком останова; головка, которая считывает символы и в зависимости от своего внутреннего состояния (тоже принадлежащего конечному набору) сдвигается вдоль ленты или меняет написанный на ней знак. Удивительно просто. Более того, все такие «машины» оказалось возможным пронумеровать [17].

И эта модель, начиная с некоторого уровня сложности, может стать *универсальной вычислительной машиной*, которая считывает записанную на ленте программу, выполняет ее, а затем записывает полученный результат на ленту. Эта модель позволила увидеть задачи, которые *не могут* быть решены в результате выполнения фиксированного числа действий некоторого алгоритма.

В этой простейшей, но очень глубокой модели вычислений содержалось в зародыше будущее развитие вычислительной техники. Все компьютеры – от калькуляторов до суперкомпьютеров и кластеров – представляют собой несовершенное воплощение машины Тьюринга. Когда электроника предложила подходящие материалы и схемы для реализации такого проекта, вычислительная техника двинулась вперед семимильными шагами. Однако основополагающая идея, обеспечивающая развитие, была выдвинута математиками.

Появление компьютеров расширило рамки возможного в математике, физике, химии, биологии, экономике, во многих других науках. И вновь возник вопрос, каковы же эти рамки? Какие задачи «с компьютерной точки зрения» являются простыми (которые можно либо достаточно быстро решить, либо доказать их неразрешимость), а какие сложными, для которых сделать то или другое достаточно трудно.

В ходе размышлений над этими проблемами родилась *концепция сложности алгоритма*. Пусть объем входных данных  $N$ , а для получения результата нужно произвести  $f(N)$  действий. Асимптотика этой функции при больших  $N$  и определяет сложность алгоритма. Простые задачи – те, в которых  $f(N)$  растет не быстрее степенной функции  $N^\alpha$  при  $N \rightarrow \infty$ , где  $\alpha$  – константа, зависящая от алгоритма. Приведем два примера.

Простая задача – сложить два  $N$ -значных числа. Она требует порядка  $N$  действий – зависимость  $f(N)$  линейна.

Сложная задача, часто называемая *задачей коммивояжера*. На плоскости расположено  $N$  точек. Следует найти кратчайший маршрут, который проходит через все эти точки. Доказывается, что в такой постановке требуется полный перебор. Сколько же

всего возможных маршрутов? Первый пункт мы можем выбрать  $N$  способами, второй  $N-1$  и т.д. В итоге по формуле Стирлинга

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \sim \exp[(N+1/2)\ln N - N].$$

Поскольку  $N^\alpha = \exp(\alpha \ln N)$ , в задаче коммивояжера число вариантов растет при  $N \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $N$ .

Ну, а теперь можно привести новый математический объект, который был введен М. Хеллманом и У. Диффи, и произвел революцию в криптографии.

Шифровал свои сообщения еще Юлий Цезарь. С тех пор придумано было очень много. Но неизменно, узнав алгоритм шифрования, мы могли прочесть зашифрованное сообщение, если уже оно попало нам в руки. И в любом случае прочесть сообщение, которые мы сами зашифровали.

Но американские исследователи обратили внимание еще на одну удивительную возможность – функцию с секретом  $K - F_k$  [18,19]. Для нее

- существует полиномиальный алгоритм нахождения значения  $F_k(x)$  для любых  $K$  и  $x$ ;
- не существует полиномиального алгоритма вычисления  $F_k^{-1}(y)$  (где  $F_k^{-1}$  – обратная функция  $y = F_k(x)$ ,  $x = F_k^{-1}(y)$ ) при неизвестном  $K$ ;
- существует полиномиальный алгоритм вычисления  $F^{-1}(y)$  при известном  $K$ .

Допустим, мы хотим получать от своих абонентов секретную информацию по открытым, доступным всем каналам, например, по интернету. Мы знаем секрет  $K$ , и всем своим адресатам передаем  $F_k$  (не сообщая  $K$ ).

Они с легкостью (за полиномиальное по  $N$ , где  $N$  – длина сообщения, время) шифруют сообщение  $x$  и передают  $F_k(x)$  по открытому каналу. Пусть те, кто интересуется перепиской, перехватывают сообщение  $F_k(x)$ , но расшифровка его (об этом следует позаботиться) без знания  $K$  может потребовать работы всех компьютеров планеты в течение времени, превышающем срок существования Вселенной. Мы вообще можем предоставить  $F_k$  всем желающим. Заметим, что сам, зашифровавший текст  $x$ , тоже не сможет прочесть его!

Для нас же это не составит труда – любое присланное сообщение будет расшифровано за полиномиальное время, т.к. мы знаем секрет  $K$ .

При наличии односторонних функций – функций с секретом – у нас появляются удивительные возможности. Например, мы можем играть в орлянку по телефону. Один бросает монету, которая выпадает орлом (ему сопоставляем нечетное число) или решкой (четное число).

Пусть у нас есть односторонняя функция  $y = f(x)$ . При этом  $f(x) = f(y)$ , если  $x$  и  $y$  имеют одинаковую четность.

Последующий алгоритм (его называют схемой Блюма–Микали) таков

- $A$  выбирает большое число  $x$ , вычисляет  $y = f(x)$  и высылают  $y$   $B$  (в криптографии  $A$  часто Алисой,  $B$  – Бобом);
- $B$  получает  $y$  и высылает свою догадку  $A$ ;
- $A$  получает догадку  $B$  и говорит, угадал ли он, и посылает  $B$  число  $x$ ;
- $B$  проверяет, не обманывает ли его  $A$ , вычисляя  $f(x)$  и сравнивая с  $y$ .

Подобные схемы и алгоритмы обеспечивают электронную подпись, разделение общего секрета (когда  $N$  человек имеют часть ключа, но открыть замок можно только если  $M$  человек хотят это сделать), подписание контрактов.

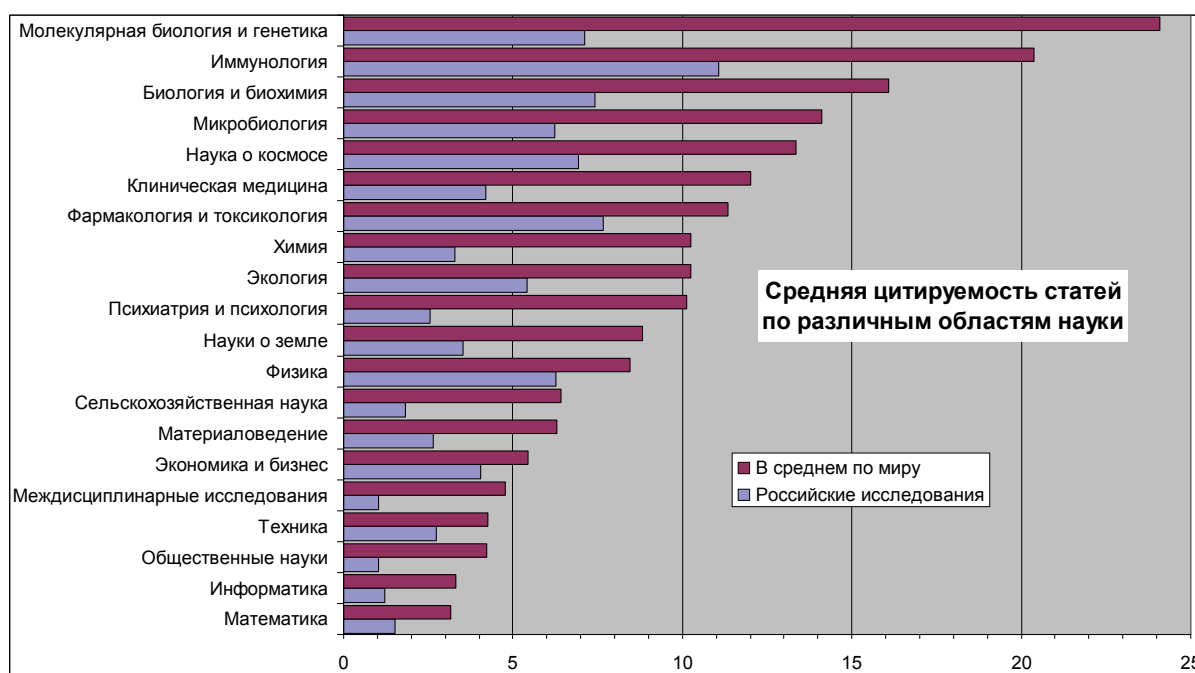
Односторонние функции породили криптографию с открытым ключом, сделали доступным для многих то, что раньше считалось прерогативой военных, дипломатов, политиков. Они позволили создать новую математическую вселенную.

Вероятно, XXI век преподнесет математикам много удивительных подарков, волнующих проблем, новых математических миров.

В заключение выражаю глубокую признательность Анатолию Георгиевичу Кусраеву, Вере Сергеевне Абатуровой, Геннадию Владимировичу Демиденко, Евгению Самойловичу Каменецкому, всем участникам замечательной VIII Региональной школы–конференции для молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа» за прекрасную творческую атмосферу, интересные обсуждения и научную романтику.

Благодарен Вере Комаровой, Андрею Подлазову и Дмитрию Фаллеру за помощь в оформлении этого текста, а также РФФИ, поддержавшего деятельность, связанную с анализом путей развития прикладной математики (проект №10-01-00786).

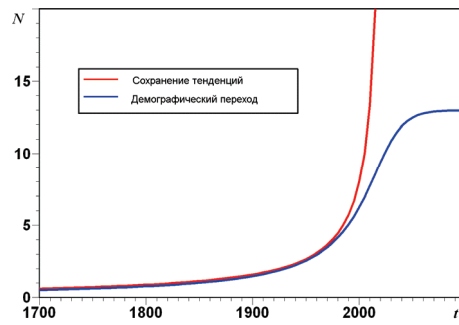
### Рисунки



**Рис. 1. Средняя цитируемость статей по областям науки**

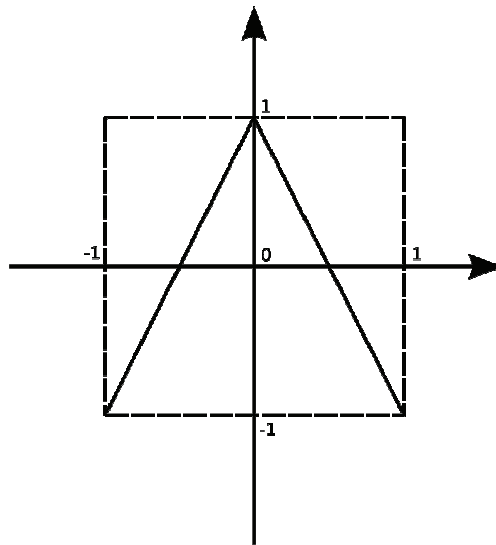
Обращает на себя внимание очень большая разница в цитируемости статей в разных областях.





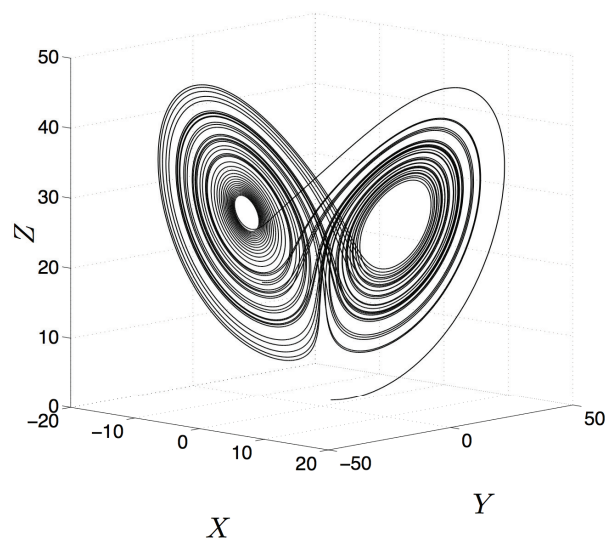
**Рис. 2. Рост населения мира**

Режим с обострением, по которому росло человечество на протяжении всей его истории, и выход на стационар, который происходит в наши дни.



**Рис. 3. Отображение «тент»**

Это отображение сыграло огромную роль в нелинейной динамике, вычислительной математике, эргодической теории.



**Рис. 4. Аттрактор Лоренца**

Траектория получена для начальных данных  $(1; 1; 1)$  на временном интервале  $[0; 50]$  при параметрах  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ .

## Литература

1. Арнольд В.И. Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором ремесел. В кн. Математика: границы и перспективы/ Пер. с англ. под ред. Д.В.Аносова, А.Н.Паршина. – М.: ФАЗИС, 2005, с.1-18.
2. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. Изд. 3-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 288 с.
3. Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей / Под ред. Г.Г.Малинецкого. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 512 с.
4. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-во «Наука», 1973. – 351 с.
5. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
6. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
7. Режимы с обострением: эволюция идеи / Под ред. Г.Г.Малинецкого. – 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 312 с.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
9. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
10. Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Изд. 5-е. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 312 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
11. Мухин Р.Р. Очерки по истории динамического хаоса: Исследования в СССР в 1950-е – 1980-е годы / Предисл. Г.М. Заславского, В.П. Визгина, Г.Г. Малинецкого. Изд. 2-е, перераб. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 320 с. (Синергетика: от прошлого к будущему, №63).
12. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте. Изд. 2-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 304 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
13. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. Получисленные алгоритмы. – М.: Мир, 2007. – 723 с.
14. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
15. Малинецкий Г.Г., Митин Н.А., Маненков С.К., Шишов В.В. Когнитивный вызов и информационные технологии// Вестник РАН. 2011. Т.81, №8, с.707-716.
16. Котов Ю.Б. Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. – М.: Едиториал УРСС, 2004, – 328 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
17. Пенроуз Р. Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. Предисл. Г.Г.Малинецкого. Изд. 4-е. – М.: УРСС, Издательство ЛКИ, 2011. – 400 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).
18. Введение в криптографию / Под общ. ред. В.В.Ященко, 3-е изд. – М.: МЦНМО «ЧеРо», 2000. – 288 с.
19. Мао В. Современная криптография: теория и практика. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 768 с.