О системе BMS А. Блюма и С. Малиновича

Приложение к публикации перевода статьи Алекса Блюма и Стенли Малиновича «Формализация сегмента Части I *Этики* Спинозы»

Шиян Т.А.

Учитывая, что Блюм и Малинович не приводят развернутого описания правил вывода и всей используемой ими системы, а их статья представляет интерес не только для профессиональных логиков, приведу здесь реконструкцию используемого авторами исчисления и отдельные развернутые комментарии к нему.

Язык теории Блюма-Малиновича (BMS)

Авторы статьи строят свою формализацию в прикладном языке первопорядковой логики предикатов с равенством, построенной на базе классической логики. В языке также фигурирует один модальный оператор «истинно, что …», который используется в формулировке аксиомной схемы 6. Никаких правил вывода для него не дается и ни в одном из доказательств эта аксиомная схема не применяется, т.е., фактически, он включен в язык только для полноты формализации спинозовских аксиом.

Алфавит BMS

1. Элементарные переменные термы:
   - индивидные переменные x, y, z, u, v, w, …[1].
2. Предикаторы:
   1) A^2 – двухместный предикатор “… атрибут …”;
   2) C^2 – двухместный предикатор “… причина …”;
   3) D^2 – двухместный предикатор “… зависит от …”;
   4) E^1 – одноместный предикатор “… вечно”;
   5) E^2 – двухместный предикатор “… сущность …”;
   6) F^1 – одноместный предикатор “… конечно”;
   7) H^1 – одноместный предикатор “… абсолютно бесконечно”;
   8) I^2 – двухместный предикатор “… содержится в …”;
   9) K^1 – одноместный предикатор “… конечно в своем роде”;
   10) K^2 – двухместный предикатор “… и … имеют одну и ту же природу”;
   11) L^2 – двухместный предикатор “… ограничивает …”;
   12) M^2 – двухместный предикатор “… модус (состояние) …”;
   13) N^1 – одноместный предикатор “… имеет необходимое существование”;
   14) P^2 – двухместный предикатор “… первее …”;
   15) Q^1 – одноместный предикатор “… свободно”;
   16) S^1 – одноместный предикатор “… субстанция”;
   17) T^2 – двухместный предикатор “… действие …”;
   18) U^2 – двухместный предикатор “… знает (познает) …”;
   19) W^3 – трехместный предикатор “… и … имеют общее …”;
   20) = – предикатор равенства[2].

[1] Авторы ограничились использованием перечисленных букв, но теоретически нам нужен счетно-бесконечный список переменных, что достигается использованием этих же букв с нижними индексами: $x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2, \ldots$

3. Кванторы:
    - квантор общности $\forall$;
    - квантор существования $\exists$.
4. Пропозициональные связки:
    - отрицание $\neg$,
    - конъюнкция $\wedge$,
    - дизъюнкция $\vee$,
    - импликация $\supset$,
    - эквивалентность $\equiv$.
5. Модальные операторы:
    - оператор истинности ∇.
6. Вспомогательные знаки:
    - круглые скобки (…) для обозначения агрегации[3].

Класс термов $\mathbf{T_{BMS}}$ содержит только указанное множество индивидных переменных $\{x, y, z, u, v, w, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, w_1, x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, w_2, \ldots\}$.

Определение класса формул языка теории BMS ($\mathbf{L_{BMS}}$):

1) если α, β, γ термы[4] из T_{BMS}, то $A(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$, $D(\alpha, \beta)$, $E(\alpha)$, $E(\alpha, \beta)$, $F(\alpha)$, $H(\alpha)$, $I(\alpha, \beta)$, $K(\alpha)$, $K(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, \beta)$, $M(\alpha, \beta)$, $N(\alpha)$, $P(\alpha, \beta)$, $Q(\alpha)$, $S(\alpha)$, $T(\alpha,\beta)$, $U(\alpha, \beta)$, $W(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\alpha = \beta)$ – формулы L_{BMS};
2) если α – индивидная переменная из T_{BMS} и $\Phi(\alpha)$ – формула L_{BMS}, то $\forall\alpha\Phi(\alpha)$ и $\exists\alpha\Phi(\alpha)$ – формулы L_{BMS};
3) если Φ и Ψ – формулы L_{BMS}, то $\neg\Phi$, $(\Phi\wedge\Psi)$, $(\Phi\vee\Psi)$, $(\Phi\supset\Psi)$, $(\Phi\equiv\Psi)$ – формулы L_{BMS};
4) если Φ – формула L_{BMS}, то и $\nabla\Phi$ – формула L_{BMS}.

О понятиях вывода и доказательства

Доказательства утверждений Блюм и Малинович осуществляют в системе субординатного натурального вывода типа Яськовского-Фиттинга. На русском языке описание подобной системы можно найти в учебниках [Бочаров, Маркин 1994, сс. 116-137] и [Бочаров, Маркин 2008, сс. 125-137, 200-207]. Теоретически подобные системы рассматривались В.А. Смирновым в монографиях [Смирнов 1999] (главы 3 и 7) [Смирнов 2002, сс. 27-33, 113-116] (в последней монографии можно найти и множество примеров использования подобных систем при решении различных задач логического анализа). Описание похожих систем можно найти и в работах Е.К. Войшвилло (например, в [Войшвилло 1989]).

Особенностью систем субординатного вывода является применение так называемых правил второго рода, т.е. правил, фактически позволяющих перестраивать

---

[2] Авторы не внесли равенство в список элементарных выражений, хотя и оговаривают его наличие. Помимо этого, ими используется предикатор неравенства «$\neq$», понимаемый стандартно как графическое сокращение отрицания наличия равенства: выражение «$x\neq y$» эквивалентно по дефиниции выражению «$\neg(x=y)$».

[3] Агрегацию авторы обозначали несколькими видами скобок: круглыми, квадратными и фигурными. Я, в соответствии с современной логической традицией, оставил только один вид. Кроме того, круглые скобки использовались авторами для обозначения кванторов, что также заменено мной в переводе на более привычные обозначения.

[4] Для рассматриваемой системы вместо «термы» можно было бы написать «индивидные переменные», как в следующем пункте, но в случае расширения системы данное различие может оказаться существенным.

одни выводы в другие, как в секвенциальных исчислениях. При построении исчислений, подобных использованному Блюмом и Малиновичем, формальное понятие вывода задается так, что применение правила второго рода не создает нового формального вывода. Чтобы продолжающийся формальный вывод представлял уже новую выводимость (то есть содержательно новый вывод), на часть прежнего формального вывода накладываются ограничения: все шаги, предшествующие результату применения данного правила, вплоть до последней посылки и включая ее, «исключаются» из дальнейшего вывода (блокируются) и к ним более не могут применяться какие-либо правила вывода. Применительно к системе Блюма-Малиновича определение вывода, таким образом, должно выглядеть следующим образом.

Выводом формулы F *называется непустая конечная последовательность формул, в которой:*

a) *каждая формула является либо посылкой, либо определением, либо аксиомой, либо постулатом, либо получена из предыдущих неисключенных формул по одному из правил вывода;*
b) *последней формулой является формула F.*

Доказательством формулы F *называется вывод формулы F, в котором не осталось не исключенных посылок.*

Как видно, пункт a) определения позволяет, в соответствии со списком «правил вывода» Блюма и Малиновича, вписывать в вывод определения, аксиомы и постулаты теории BMS. Но помимо них авторы статьи используют (в доказательствах утверждений VI и XI) в такой же роли уже доказанные теоремы (утверждения). Поскольку все доказательства в статье помечены как наброски (sketch), то можно отнести эти нарушения определения вывода на счет сокращенной (схематичной) записи.

С другой стороны, авторы не оговаривают также правил использования посылок, что (вместе с огромным числом опечаток) наводит на мысль, что авторы могли случайно не упомянуть об использовании теорем в выводе. Чтобы легализовать использованный авторами прием, нужно не просто расширить пункт a) упоминанием об использовании теорем, но и сделать понятие доказательства независимым относительно понятия вывода и предшествующим ему. Таким образом, используемое авторами понятие доказательства можно сформулировать следующим образом.

Доказательством формулы F *называется непустая конечная последовательность формул, в которой:*

a) *каждая формула является либо посылкой, либо определением, либо аксиомой, либо постулатом, либо теоремой, либо получена из предыдущих неисключенных формул по одному из правил вывода;*
b) *не осталось не исключенных посылок;*
c) *последней формулой является формула F.*

Понятие вывода получается из понятия доказательства отбрасыванием условия b).

Пропозициональные правила вывода

Полная система правил вывода для пропозиционального субординатного исчисления, подобного использованному Блюмом и Малиновичем, приводится в

[Бочаров, Маркин 1994, сс. 116-129] и [Бочаров, Маркин 2008, сс. 125-137][5].

$$В\wedge: \frac{A, B}{A \wedge B} \qquad И\wedge: \frac{A \wedge B}{A}; \frac{A \wedge B}{B}$$

$$В\vee: \frac{A}{A \vee B}; \frac{B}{A \vee B} \qquad И\vee: \frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

$$В{*}\supset: \frac{B}{C \supset B} \qquad И\supset: \frac{A \supset B, A}{B}$$

$$В{*}\neg: \frac{B, \neg B}{\neg C} \qquad И\neg: \frac{\neg\neg A}{A}$$

Формулы вида ($A \equiv B$) понимаются как ($A \supset B$) $\wedge$ ($B \supset A$).

Звездочками помечены правила вывода второго рода; в них буква С отсылает к последней посылке в выводе, предшествующей применению данного правила. Соответственно, в случае применения правила «В⊃» «исключаются» из дальнейшего вывода (блокируются) все шаги выше формулы «$C \supset B$» вплоть до С и включая ее. Аналогично, в случае применения правила «В¬» «исключаются» все шаги выше формулы «$\neg C$» вплоть до С и включая ее.

Приведу список правил вывода и законов для пропозициональных связок, приведенный Блюмом и Малиновичем. При переводе статьи некоторые из названий были обозначены мной иначе, в соответствии с русскоязычной традицией философской логики, некоторые названия сохранены.

1) *absorption* – Абс. – поглощение (абсорбция);
2) *addition* – В∨ – введение дизъюнкции;
3) *association* – Асс. – ассоциативность ∨;
4) *constructive dilemma* – c.d. – конструктивная дилемма;
5) *commutation*
6) *conjunction* – В∧ – введение конъюнкции;
7) *conditional proof* – В⊃ – введение импликации;
8) *De Morgan* – ДМ – законы Де Моргана;
9) *distribution* – Дист. – дистрибутивность;
10) *exportation* – Эксп. – закон экспортации ⊃;
11) *hypothetical syllogism* – h.s. – гипотетический силлогизм (транзитивность ⊃);
12) *idempotence* – Идемп. – идемпотентность;
13) *material biconditional* – О≡ – опр. материальной эквивалентности;
14) *material conditional* – О⊃ – опр. материальной импликации;
15) *modus ponens* – m.p. – modus ponens;
16) *modus tollens* – m.t. – modus tollens;
17) *simplification* – Симп. – симплификация;
18) *transposition* – КП – контрапозиция;
19) *assumption of limited scope* ___ ограничение (запрет) на дальнейшее применение последней посылки и следующих за ней формул вывода вплоть до черты (после применения правила В⊃).

Насколько использованные Блюмом и Малиновичем «правила» понятны из их названий и из контекста их употребления, можно найти ряд совпадений с правилами

[5] Это исчисление является модификацией одного из исчислений Е.К. Войшвилло.

системы Бочарова-Маркина. Вот эти совпадения:

- правило *conjunction* совпадает с правилом введения конъюнкции,
- правило *addition* совпадает с правилами введения дизъюнкции,
- правило *conditional proof* совпадает с правилом второго рода введения импликации,
- правило *modus ponens* совпадает с правилом исключения импликации,
- правило *material biconditional* совпадает с переинтерпретацией эквивалентности через конъюнкцию двух импликаций.
- Правило *simplification* охватывает, по крайней мере, правила исключения конъюнкции системы Бочарова-Маркина, а также, возможно, и более сложные выводы вида $(A\supset(B\wedge C))$ $\mid\!-$ $(A\supset B)$, $(A\supset C)$. Впрочем, поскольку выводы второго вида обычно упоминаются в связке с правилами *material conditional* и *distribution*, возможно, что правило *simplification* по замыслу авторов[6] должно совпадать с правилом исключения конъюнкции системы Бочарова-Маркина, а вывод $(A\supset(B\wedge C))$ $\mid\!-$ $(A\supset B)$ (и, аналогично для $(A\supset C)$) осуществляется по цепочке: $A\supset(B\wedge C)$ $\mid\!-$ $\neg A\vee(B\wedge C)$ $\mid\!-$ $(\neg A\vee B)\wedge(\neg A\vee C)$ $\mid\!-$ $(\neg A\vee B)$ $\mid\!-$ $(A\supset B)$.

Таким образом, только три пропозициональных правила системы Бочарова-Маркина, содержащих в своих формулировках знак отрицания, не упоминаются в Списке правил вывода Блюма и Малиновича. Это наводит на мысль об избыточности некоторых других упоминаемых ими правил, но данный вопрос я здесь исследовать не буду.

Помимо *material biconditional* и некоторые другие «правила» отсылают к использованию свойств взаимоопределимости связок:

- правило *material conditional* указывает на использование определения материальной импликации через дизъюнкцию и отрицание: выражение вида $(A\supset B)$ эквивалентно выражению вида $(\neg A\vee B)$;
- правило *De Morgan* отсылает к использованию законов Де Моргана (Деморгана):
    - $\neg(A\wedge B)$ эквивалентно $(\neg A\vee\neg B)$,
    - $\neg(A\vee B)$ эквивалентно $(\neg A\wedge\neg B)$.

Некоторые правила Блюма и Малиновича отсылают к использованию классических умозаключений (помимо уже упоминавшегося *modus ponens*):

- правило *modus tollens* представляет один из вариантов закона контрапозиции импликации: $(A\supset B)$, $\neg B$ $\mid\!-$ $\neg A$;
- правило *constructive dilemma* в единственном случае обращения к нему отсылает к рассуждению по так называемой сложной конструктивной дилемме: $(A\supset B)$, $(C\supset D)$, $(A\vee C)$ $\mid\!-$ $(B\vee D)$;
- правило *hypothetical syllogism* представляет один из вариантов обращения к свойству транзитивности импликации: $(A\supset B)$, $(B\supset C)$ $\mid\!-$ $(A\supset C)$.

Еще одним вариантом обращения к закону контрапозиции импликации является «правило» *transposition*, которое отсылает к использованию логической эквивалентности выражений $(A\supset B)$ и $(\neg B\supset\neg A)$.

Также два правила отсылают к использованию различных вариантов законов

[6] Косвенно в пользу этой трактовки говорит и обращение к *Principia mathematica* Уайтхеда и Рассела [Whitehead, Russell]. Существенное влияние, оказанное на Блюма и Малиновича этой традицией, очевидно, например, в области используемой ими логической нотации. В начале первого тома *Principia mathematica* Уайтхед и Рассел приводят список утверждений, на которые они ссылаются по названиям. Есть в этом списке принципы симплификации (Simp), имеющие вид (в используемой здесь нотации) $((A\wedge B)\supset A)$ и $((A\wedge B)\supset B)$. Тогда как никаких выводимостей, похожих на $(A\supset(B\wedge C))$ $\mid\!-$ $(A\supset B)$, $(A\supset C)$, под именем «*simplification*» не указано.

поглощения (идемпотентности):

- правило *idempotence* указывает на обращение к свойствам
  - идемпотентности конъюнкции: ($A \wedge A$) эквивалентно A,
  - идемпотентности дизъюнкции: ($A \vee A$) эквивалентно A;
- единственное упоминание правила *absorption* в выводе (16-й шаг в схеме доказательства утверждения IV) легитимизирует переход от простой импликации ($A \supset B$) к выражению вида ($A \supset (A \wedge B)$).

Правило *exportation* отсылает к использованию эквивалентности двух формул ($A \supset (B \supset C)$) и (($A \wedge B) \supset C$), фиксируемой следующими законами классической логики:

- закон экспортации: $((A \wedge B) \supset C) \vdash (A \supset (B \supset C))$,
- закон импортации: $(A \supset (B \supset C)) \vdash ((A \wedge B) \supset C)$.

Единственное упоминание правила *association* (11-й шаг схемы доказательства утверждения I) фиксирует обращение к свойству ассоциативности дизъюнкции в форме $(A \vee (B \vee C)) \vdash ((A \vee B) \vee C)$.

Правило *distribution* всегда упоминается авторами в связке с большим числом других правил, но, по всей видимости, они подразумевали под ним законы взаимной дистрибутивности конъюнкции и дизъюнкции:

- $(A \vee (B \wedge C))$ эквивалентно $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
- $(A \wedge (B \vee C))$ эквивалентно $((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$.

Правило *commutation* отсылает, видимо, к свойствам коммутативности конъюнкции и дизъюнкции, но ни в одном выводе оно не упоминается, поэтому я исключил его упоминание из списка «правил вывода» в [Блюм, Малинович 2011].

Кроме этих правил, Блюм и Малинович используют еще одно очень важное правило рассуждения, никак не оговаривая его. Это правило эквивалентной замены, которое можно сформулировать так: если формулы A и B эквивалентны и $\Phi(A)$ – формула, содержащая A в качестве своей подформулы, и $\Phi(B \backslash A)$ – результат замены в формуле $\Phi(A)$ всех вхождений формулы A на формулу B, то формулы $\Phi(A)$ и $\Phi(B \backslash A)$ эквивалентны. Это правило справедливо в случае рассуждений в рамках логики высказываний. В случае кванторных теорий, это правило должно быть ограничено рядом дополнительных условий.

Никаких логических принципов, связанных с оператором истинности ∇, Блюмом и Малиновичем не упоминается и не используется.

Кванторные и другие предикатные правила

Приводимые Блюмом и Малиновичем правила введения и исключения кванторов следующие.

20) *existential generalization*	– В$\exists$ –	введение квантора существования;
21) *universal generalization*	– В$\forall$ –	введение квантора общности;
22) *universal instantiation*	– И$\forall$ –	удаление квантора общности.

Правила введения квантора существования и исключения квантора общности, можно сформулировать так (α – индивидная переменная):

$$В\exists : \frac{A}{\exists \alpha A(\alpha)}; \qquad И\forall : \frac{\forall \alpha A(\alpha)}{A}.$$

В исчислении, описанном в [Бочаров, Маркин 1994, сс. 129-137] и [Бочаров, Маркин 2008, сс. 200-207], данные правила имеют более сложный вид и позволяют при введении и удалении кванторов осуществлять переименование квантифицируемой (деквантифицируемой) переменной и некоторые более сложные подстановки. Система правил, используемая Блюмом и Малиновичем, на сколько можно судить, таких подстановок (переименований) не предусматривает, и авторы прибегают к специальной операции переименования (relettering) связанных переменных, которая фигурирует в некоторых выводах, но которой нет в списке «правил вывода». Соответственно, в переводе статьи я ввел это правило в основной список.

Правило введения квантора общности, насколько оно восстанавливается из способов его употребления в выводах, имеет вид

$$B\forall : \frac{A}{\forall \alpha A}.$$

Оно также не позволяет осуществлять переименование квантифицируемой переменной или подстановку вместо нее.

В целом, неограниченное навешивание квантора общности сопряжено с возможностью нарушения логических связей между формулами вывода. В этой связи кажется неслучайным отсутствие в списке правил вывода правила исключения квантора существования, поскольку наличие этих двух правил в неограниченной форме позволяет осуществлять неправомерные выводы, например, вида $\exists\alpha A(\alpha) \vdash \forall\alpha A(\alpha)$. Обычно эта проблема решается введением различных ограничений на осуществление операций введения и исключения кванторов. Эти ограничения могут иметь разные формы: может ограничиваться возможность применения того или иного кванторного правила, могут внутрь того или иного правила вводиться дополнительные ограничения на посылки или заключения, могут вводиться дополнительные ограничения на то, какой вывод и какое доказательство считать правильными[7] и др. Но есть и теории с неограниченным правилом введения квантора общности, например, исчисление со схемами аксиом и правилом введения квантора общности в качестве единственного кванторного правила [Мендельсон 1971, сс. 65-66]. Так что остается открытым вопрос, достаточно ли отсутствия правила исключения квантора существования в системе Блюма-Малиновича, чтобы избегать нарушений логического вывода, или же в используемых ими правилах присутствуют какие-то дополнительные, не артикулируемые ими условия?

Блюм и Малинович в своей статье упоминают и используют еще два кванторных правила:

23) *quantifier denial* – Q¬ – пронесение отрицания через кванторы;
24) *quantifier distribution* – QД – дистрибутивность кванторов.

Правило *quantifier denial* отсылает к принципам пронесения знака отрицания через кванторы:

- $\neg\forall\alpha A$ эквивалентно $\exists\alpha\neg A$;
- $\neg\exists\alpha A$ эквивалентно $\forall\alpha\neg A$.

Правило *quantifier distribution* отсылает к применению двух принципов пронесения кванторов через знак импликации:

- $\forall\alpha(A\supset B) \vdash (\exists\alpha A\supset B)$, если α не содержится свободно в B;
- $\exists\alpha(A\supset B) \vdash (A\supset\exists\alpha B)$, если α не содержится свободно в A.

[7] Например, в предикатном исчислении, описываемом в [Бочаров, Маркин 1994, сс. 129-137] и [Бочаров, Маркин 2008, сс. 200-207], эта проблема решается введением ряда дополнительных понятий, с помощью которых маркируются переменные в выводе («переменная … – абсолютно ограничена» и «переменная … – ограничена относительно переменной …»), и эта маркировка учитывается в понятиях вывода и доказательства. Содержательный (семантический) смысл этих характеристик разъясняется в [Бочаров, Маркин 1994, сс. 132-134] и [Бочаров, Маркин 2008, сс. 202-205].

Кроме кванторных правил и правила переименования связанных переменных, Блюм и Малинович обращаются к свойствам рефлексивности и транзитивности отношения равенства, которые не вынесены ими в список правил вывода, но оговариваются в соответствующих местах доказательств. Упоминание обеих принципов также ключено мной в основной список правил вывода.

Остальная часть дедуктивных постулатов теории BMS относится уже к реконструкции и формализации идей Спинозы и описывается авторами в их статье.

Заключение

Помимо историко-философского и идеологического (в смысле продвижения идей логического анализа) интереса рассмотренной попытки формализации Этики Спинозы, статья Блюма и Малиновича интересна еще и использованным ими логическим аппаратом. Логическое исчисление, положенное в основу формализации, является относительно редким примером использования систем субординатного натурального вывода, и остается сожалеть, что авторы не дали полного, корректного описания применяемого ими логического аппарата. Хочется надеяться, что данная статья смогла в основных чертах восполнить этот досадный пробел.

Литература

1. *Блюм А., Малинович С.* Формализация фрагмента первой части Этики Спинозы // Vox / Голос. Философский журнал. Вып. 10 (июнь 2011).
2. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Основы логики. М., 1994. С. 116-137.
3. *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Введение в логику. М., 2008. С. 125-137, 200-207.
4. *Войшвилло Е.К.* Символическая логика. Классическая и релевантная. М., 1989.
5. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971.
6. *Смирнов В.А.* Формальный вывод и логические исчисления // Теория логического вывода. М., 1999.
7. *Смирнов В.А.* Логические методы анализа научного знания. М., 1999.
8. *Blum A., Malinovich S.* A Formalization of a Segment of Spinoza's Ethics // Metalogicon. Rivista internazionale di logica pura e applicata, di linguistica e di filosofia. Anno VI. N.1. Gennaio – Giugno 1993. Napoli/Roma, L.E.R.
9. *Whitehead A.N., Russell B.* Principia mathematica. Vol. I. Cambridge: University Press, 1910.